

УДК 664.047:530.17

К вопросу математической модели процесса посола мяса сельди

М. В. ШУМАНОВА¹, д-р техн. наук Ю. А. ФАТЫХОВ²,

канд. физ-мат. наук В. А. ШУМАНОВ

¹shumanovamaria@mail.ru, ²elina@klgtu.ru

Калининградский государственный технический университет
236022, Калининград, Советский пр., 1

Проблема создания математической модели любых процессов является весьма актуальной в исследованиях. В нашем случае была предпринята попытка создать модель процесса посола мяса рыбы (сельди). Рассмотрено распространение поваренной соли из водного раствора в мясе сельди. Задача сводилась к распространению соли в полубесконечном стержне от сосредоточенного в одном его сечении мгновенного источника соли. Для этой цели мы использовали анализ размерностей. В результате чего было получено автомодельное решение дифференциального уравнения диффузии. Это решение справедливо в области интервала времени, когда размер области распространения соли много больше размера области начального солевыведения h , но еще меньше от краев стержня мяса рыбы. Это решение имеет качественное сходство с результатами экспериментальных исследований, полученных методом фотонной корреляционной спектроскопии.

Ключевые слова: мясо сельди, соль, уравнение диффузии, автомодельность, анализ размерностей, коэффициент диффузии, концентрация.

On the problem of a mathematical model for herring salting process

M. V. SHUMANOVA¹, D. Sc. YU. A. FATYKHOV²,

Ph. D. V. A. SHUMANOV

¹shumanovamaria@mail.ru, ²elina@klgtu.ru

Kaliningrad State Technical University
236022, Russia, Kaliningrad, Sovetsky pr., 1

The problem of creating a mathematical model of any process is of great importance in various researches. The article deals with an attempt to create a model of fish (herring) salting process. The circulation of sodium chloride from an aqueous solution in herring is analyzed. The task was reduced to salt distribution in a semi-infinite rod from instantaneous source of salt located in one of its cross-sections. The dimensional analysis is used for this purpose. As a result, the decision is obtained by self-similar solution of diffusion equation. The solution is valid for the time interval when the size of salt distribution area is much larger than the size of initial salt-releasing area h but, at the same time, is smaller than the area of fish cord. This solution has a quality similar to the experimental results obtained by photon correlation spectroscopy.

Keywords: herring, salt, diffusion equation, self-similarity, dimensional analysis, diffusion coefficient, concentration.

Введение

Проблема процесса просаливания мяса рыбы является весьма актуальной как в экспериментальном, так и в теоретическом плане.

Продолжительность посола имеет важное значение при обработке рыб. Ранее были разработаны методы определения продолжительности посола [1–4]. Получен-

ные в данных работах формулы требуют знания коэффициентов диффузии, которые не всегда известны. Динамика просаливания и изменение коэффициента диффузии соли в мясе рыбы изучалась недостаточно в процессе посола. Даже нет единого подхода к определению значений коэффициентов диффузии. Были предприняты попытки создания математической модели процесса просаливания. Так в работах [5, 6] использован вариационный метод решения уравнения диффузии. В настоящей работе предпримем решение уравнения диффузии, применяя анализ размерностей [7] и нахождение автомодельного решения данного уравнения.

Автомодельное решение дифференциального уравнения диффузии

Дифференциальное уравнение диффузии имеет вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где D — коэффициент диффузии, который будем считать постоянным; C — концентрация соли или соленость.

Рассматриваем распространение поваренной соли из водного раствора в мясе сельди.

В начальный момент будем считать, что вся соль сосредоточена в малой области толщиной h вблизи сечения $x = x_0$ (рис. 1).

Граничные условия:

$$C(0, t) = C_0, \quad C(e, t) = 0, \quad (2)$$

здесь e — длина стержня с мясом рыбы.

Начальное условие:

$$C(x, 0) = C_0(x) \quad (3)$$

Будем считать, что размер области солевыведения $h \ll x_0$ и $h \ll e - x_0$.

Можно данную задачу решить, используя численные методы, даже на ЭВМ невысокого класса.

Мы используем для решения данной задачи анализ размерностей.

Будем считать, что вся соль в начальный момент времени сосредоточена в сечении $x = x_0$, т.е. $h = 0$. Из этого следует, что стержень можно считать бесконечным.

Таким образом, задача сводится о распространении соли в бесконечном стержне от сосредоточенного в одном его сечении мгновенного источника соли.

Соль в стержне не уничтожается и не порождается. Поэтому в любой момент времени количество соли равно в любой момент времени начальному количеству M :

$$\rho S \int_{-\infty}^{\infty} C' dx = M. \tag{4}$$

Таким образом, $C = a$ — концентрация соли в момент времени t в сечении x : $t = a_1$; $D = a_2$; $C' = \frac{M}{\rho S} = a_3$; $x - x_0 = a_4$.

Параметры M , ρ , S по отдельности никуда не входят, и определяющим параметром будет их комбинация C' .

Имеем:

$$C = f(t, D, C', x - x_0) \tag{5}$$

Размерности первых трех параметров в (5) являются независимыми. Размерность определяющего параметра $x - x_0$ выражается:

$$[x - x_0] = t^{1/2} D^{1/2} C' \circ,$$

следовательно,

$$[C] = [C'] [D]^{1/2} t^{1/2}.$$

Согласно анализу размерностей, имеем:

$$\Pi = \Phi(\Pi_1); \Pi = \frac{C}{C' D^{-1/2} t^{-1/2}}; \Pi_1 = \frac{x - x_0}{D^{1/2} t^{1/2}}, \tag{6}$$

отсюда:

$$C = \frac{C'}{(Dt)^{1/2}} \Phi(\xi); \xi = \frac{x - x_0}{(Dt)^{1/2}}. \tag{7}$$

Введем масштаб солености:

$$C(t) = C' (Dt)^{-1/2}$$

и масштаб длины:

$$e_0(t) = (Dt)^{1/2}.$$

Тогда распределение солености (7) представляется в виде:

$$C = C_0(t) \Phi\left(\frac{x - x_0}{e_0(t)}\right). \tag{8}$$

Из (7) получаем, дифференцируя:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x} &= \frac{C'}{(Dt)} \frac{d\Phi}{d\xi}, \\ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} &= \frac{C'}{Dt^{3/2}} \frac{d^2\Phi}{d\xi^2}; \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= -\frac{1}{2t} \frac{C'}{(Dt)^{1/2}} \Phi(\xi) - \frac{1}{2t} \frac{C'}{(Dt)^{1/2}} \xi \frac{d\Phi}{d\xi}. \end{aligned} \tag{9}$$

Подставляя выражение (9) в уравнение (1), получаем:

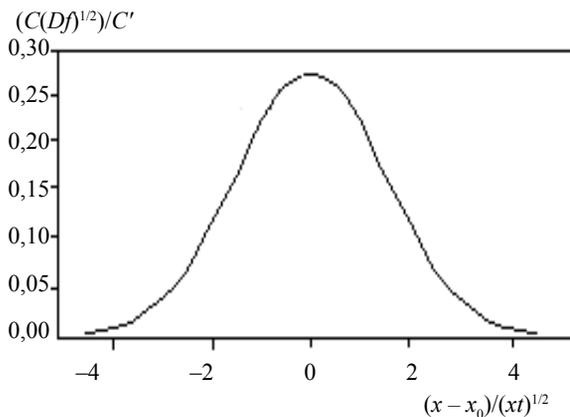


Рис. 1. Автомодельное решение уравнения диффузии

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\xi \frac{d\Phi}{d\xi} + \frac{1}{2}\Phi = 0. \tag{10}$$

Используя условие, что соленость для любого момента времени на бесконечность равна нулю, имеем:

$$\Phi(\pm\infty) = 0. \tag{11}$$

Подставляя выражение (7) в (4), получаем второе условие для функции $\Phi(\xi)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) d\xi = 1. \tag{12}$$

Уравнение (10) представляет собой уравнение в полных дифференциалах, интегрируя, получаем:

$$\frac{d\Phi}{d\xi} + \frac{1}{2}\xi\Phi = \text{const},$$

здесь $\text{const} = 0$, т.к. при $\xi = 0$ $\frac{d\Phi}{d\xi} = 0$ (решение симметрично).

Интегрируя еще раз, получаем:

$$\Phi = A e^{-\frac{\xi^2}{4}}, \tag{13}$$

где A находим, используя условие (12)

$$A = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \text{ и значение интеграла } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}.$$

Окончательно имеем решение:

$$C = \frac{C'}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}}. \tag{14}$$

Это решение справедливо в области интервала времени, когда размер области распространения соли много больше размера области начального солевыведения h , но еще меньше от краев стержня мяса рыбы.

Выводы

При создании математической модели процесса просаливания и нахождении автомодельного решения дифференциального уравнения диффузии, были экспериментально определены коэффициенты диффузии, использован метод корреляционной спектроскопии [8]. По тарировочному графику $D = f(C)$ была определена концентрация. На рис. 2. представлена экспериментальная зависимость концентрации от параметра ξ .

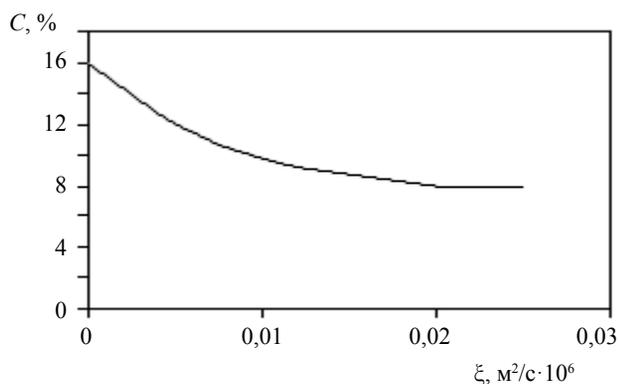


Рис. 2. Зависимость концентрации от параметра $\xi = x^2/t$

Как видно из этого рисунка, функциональная зависимость концентрации имеет качественное сходство с зависимостью (14), полученной по результатам расчетов.

Список литературы

1. Ионас Г. П. Определение продолжительности просаливания сельдевых рыб // Рыбное хозяйство. 1975. № 11. С. 66–67
2. Леванидов И. П., Михалева В. Ф. Особенности кинетики просаливания мороженных рыб. — Владивосток: Изд-во ТИНРО. 1976. Т. 99. С. 50–55
3. Миндер Л. П. Некоторые вопросы теории посола рыбы // Труды ПИНРО. 1970. Вып. 30. С. 143–158.
4. Рулев Н. Н. Кинетика бочкового посола атлантической сельди // Тр. БалтНИРО. — Калининград, 1962. Вып. 8. С. 190–216.
5. Михайлов Ю. А. Вариационные методы в теории нелинейного тепло- и массопереноса/Ю. А. Михайлов, Ю. Т. Глазун. —Рига: Зинатне, 1985. 192 с.
6. Технология рыбы и рыбных продуктов: учебник для вузов/С. А. Артюхова, В. А. Гроховский [и др.]; под ред. А. М. Ершова. — 2-е изд. — М: Колос, 2010. 1063 с.
7. Баренблат Т. Н. Анализ размерностей. — Москва: Изд-во МФТИ, 1987. 168 с.
8. Шуманова М. В. О возможности применения нанотехнологических методов для исследования процесса посола сельди. // Высокие технологии, фундаментальные исследования, инновации: сборник статей Семнадцатой международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные исследования, разработка и применение высоких технологий в промышленности и экономике» — СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2014. С. 181–187

References

1. Jonas G. P. Determination of the duration herring fish salting. *Fishery*. 1975. No 11. P. 66–67. (in Russian)
2. Levanidov, I. P. Kinetics of frozen fish salting/I. P. Levanidov, V. F. Mikhaleva. Ed. TINRO. Vladivostok, 1976. Vol. 99. P. 50–55. (in Russian)
3. Minder, L. P. Some questions about fish salting theory. *Works PINRO*. Murmansk 1970. Vol. 30. p. 143–158. (in Russian)
4. Rulev, N. N.. Kinetics of barrel salted herring. *Proceedings of BaltNIRO*. — Kaliningrad, 1962. Vol. 8. P. 190–216. (in Russian)
5. Mikhailov, Y. A. Variational methods in the theory of nonlinear heat and mass transfer/Y. A. Mikhailov, Y. T. Glazunov. -Riga: Zinatne, 1985.192p. (in Russian)
6. Technology of fish and fish products: a textbook for high schools/SA Artyuhova, V. A. Grokhovsky [et al.] ed. A. M. Yershov. — 2nd ed. — Moscow: Kolos, 2010. 1063 p. (in Russian)
7. Barenblat T. N. Dimensional Analysis/T. N. Barenblat // Ed. MIPT. Moscow, 1987.168 p. (in Russian)
8. Shumanova M. V. The possibility of using nanotechnology techniques to study the process of herring salting. High technology, fundamental research and innovation: Proceedings of articles of the Seventeenth International Scientific-Practical Conference «Fundamental and applied research, development and application of high technologies in the industry and the economy» SPb.: Publ Polytechnic University, 2014. P. 181–187. (in Russian)

18 – 20
НОЯБРЯ 2015
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
EXPOFORUM

XXIII МЕЖДУНАРОДНАЯ
ПРОДОВОЛЬСТВЕННАЯ
ВЫСТАВКА

peterfood

Разделы выставки:

- Мясо и мясопродукты. Мясная гастрономия
- Птица. Яйцо
- Рыба и морепродукты
- Овощи. Фрукты
- Замороженные продукты. П/ф.
- Молочная продукция. Сыры
- Бакалея (зернопродукты, макаронные изделия, специи)
- Готовые блюда, салаты
- Масложировая группа
- Кондитерская продукция. Снэки, орехи, сухофрукты
- Соки. Воды. Безалкогольные напитки
- Чай. Кофе. Какао
- Спиртные напитки. Табак
- Здоровое питание. Детское питание
- Консервация. Соусы
- Салон сопутствующего оборудования «ПетерфудТех»

Контакты:

Тел./ф.: 8 (812) 327-49-18
E-mail: imperia@imperiaforum.com, press@imperiaforum.com
<http://peterfood.ru/>