УДК 664.66

Моделирование процесса натекания неньютоновской жидкости на жесткую преграду

А. С. ИВАНОВА, *д-р техн. наук* **Г. В. АЛЕКСЕЕВ**
Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО
Институт холода и биотехнологий
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9

The calculation of time of the filling the form, necessities for designing corresponding to technological equipment as can be seen from the last advantages-mules, is conditioned by importance V1. Izotermicheskiy formed flow, to liquids, which is a dough, in pipe is found under the action of the same power, as traditionally considered flows to liquids, however in considered event is else added power to gravity dose test, residing in channel dose-torah. This additional power shall take into account as a certain additional pressure.

Key words: time of the filling the form, designing technological mashine, formed izotermicheskiy flow, liquid.

Ключевые слова: время заполнения формы, проектирование технологического оборудования, изотермический установившийся поток, бингамовская жидкость.

Хлебобулочные и крупяные изделия в настоящее время занимают значительный удельный вес в отечественном рационе питания, поэтому производство возможно более широкого ассортимента таких изделий является актуальным.

К числу мелкоштучных хлебобулочных изделий, пользующихся популярностью у населения, относятся открытые пироги с начинкой типа ватрушек или пиццы.

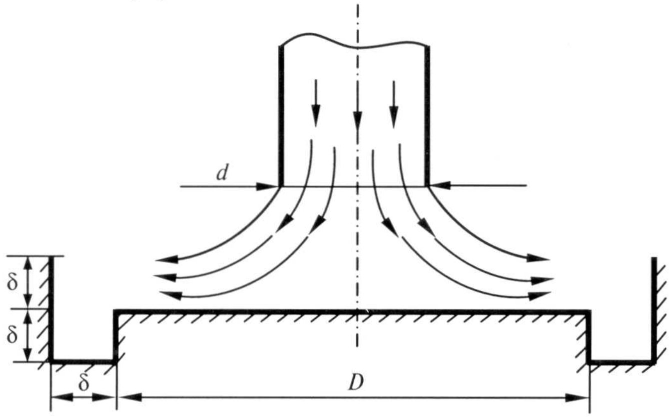
Формование тестовой основы таких изделий значительно облегчается и поддается механизации, если оно производится в «перевернутом» виде, путем формования ограничивающего бортика за счет саморастекания дозируемой навески теста.

Рассмотрим процесс приготовления такой заготовки в форме, изображенной на рисунке.

Обозначим d — диаметр цилиндрического насадка дозатора, а D — диаметр тестовой заготовки для укладки начинки. Толщину заготовки, высоту и ширину буртика будем считать одинаковыми и равными δ.

Определим время заполнения формы из следующих соображений.

Пусть V_1 — скорость течения жидкого теста в канале дозатора, V_2 — радиальная скорость растекания по круговой части формы и V_3 — радиальная скорость растекания по кольцевой части формы. Дополнительно полагаем, что толщина растекающегося слоя теста по круговой части формы — δ, а толщина растекающегося слоя по кольцевой части формы — 2δ.



Форма для приготовления тестовой заготовки

Из закона сохранения массы теста $Q_1 = Q_2$ для вытекающего и растекающегося теста при этих допущениях имеем

$$\frac{V_1 \pi d^2}{4} = \pi D V_2.$$

В момент касания тестом формы очевидно $d = D$ и поэтому при $t = 0$ справедливо выражение

$$V_{20} = V_1 \frac{d}{4\delta}.$$

При достижении фронтом растекающегося теста границы круговой области, т. е. при $t = t_1$,

$$V_2 = V_1 \frac{d^2}{4D\delta}.$$

Считая движение равнозамедленным, из соответствующих соотношений кинематики перемещения фронта вычислим время

$$t_1 = \frac{4D\delta}{V_1 d} \frac{D-d}{D+d}.$$

На границе круговой и кольцевой областей формы также выполняется закон сохранения массы. В этом случае он будет иметь вид $Q_2 = Q_3$ или

$$\pi D \delta V_2 = \pi D_\delta 2\delta V_3,$$

где D_δ — текущий диаметр по кольцевому зазору.

Учитывая, как и ранее, что на границе двух участков $D = D_\delta$, начальная скорость на кольцевом зазоре определяется соотношением

$$V_{30} = \frac{V_2}{2} = V_1 \frac{d^2}{8D\delta}.$$

Для равнозамедленного движения на участке кольцевого зазора время перемещения определим так же, как для круговой области из уравнений кинематики. В результате это время определится соотношением

$$t_2 = \frac{16\delta(D+\delta)D\delta}{V_1 d^2 (2D+\delta)}.$$

Общее время заполнения формы можно вычислить суммированием t_1 и t_2 в виде

$$t = \frac{4D\delta}{V_1 d}\left[\frac{D-d}{D+d} + \frac{4\delta(D+\delta)}{d(2D+\delta)}\right].$$

Вычисление времени заполнения формы, необходимое для проектирования соответствующего технологического оборудования, как видно из последней формулы, обусловлено значением V_1.

Изотермический установившийся поток бингамовской жидкости, которой является тесто, в трубе находится под действием тех же сил, что и традиционно рассматриваемые потоки ньютоновской жидкости, однако в данном случае еще добавляется сила тяжести навески теста, находящейся в канала дозатора. Эту добавочную силу учтем как некоторое добавочное давление Δp_0.

Тогда в общем виде можно записать, что градиент скорости сдвига пропорционален касательному напряжению:

$$\frac{\mathrm{d}\,w}{\mathrm{d}\,n} + f(\tau). \tag{1}$$

Для потока, движущегося в цилиндрической трубе,

$$-\frac{\mathrm{d}\,w}{\mathrm{d}\,r} = f(\tau). \tag{2}$$

Если в движущемся потоке жидкости выделить цилиндр длиной l и радиусом r, то этот цилиндр будет находиться в равновесии под действием силы сопротивления, определяемой разностью давлений на обоих концах выделенного элементарного объема, и касательного напряжения, приложенного к его поверхности,

$$(\Delta p + \Delta p_0)\pi r^2 - 2\pi r l \tau = 0.$$

Откуда $\tau = 1/2(\Delta p + \Delta p_0)r/l$. Максимальное напряжение у стенки трубы $\tau_{\text{ст}} = 1/2(\Delta p + \Delta p_0)R/l$, где R — радиус трубы. Таким образом,

$$\tau = \tau_{\text{ст}}\frac{r}{R}. \tag{3}$$

Подставив зависимость (3) в уравнение (2), находим:

$$-\frac{\mathrm{d}\,w}{\mathrm{d}\,r} = f\left(\tau_{\text{ст}}\frac{r}{R}\right). \tag{4}$$

Проинтегрировав уравнение (4), получим распределение скорости в трубе:

$$\int\limits_w^0 -\mathrm{d}\,w = \int\limits_r^R f\left(\tau_{\text{ст}}\frac{r}{R}\right)\mathrm{d}\,r$$

или

$$w = \int\limits_r^R \left(\tau_{\text{ст}}\frac{r}{R}\right)\mathrm{d}\,r. \tag{5}$$

Объемный расход жидкости, проходящей через элементарный объем,

$$\mathrm{d}\,V_{\text{сек}} = w 2\pi r \mathrm{d}\,r. \tag{6}$$

Интегрируем уравнение (6) по частям:

$$\int\limits_0^{V_{\text{сек}}} \mathrm{d}\,V_{\text{сек}} = \pi\int\limits_0^R w 2R \mathrm{d}\,r = \pi\left[wr^2 - \int r^2 \mathrm{d}\,w\right]_0^R. \tag{7}$$

При $r = R$ скорость $w = 0$, поэтому уравнение (7) упрощается. Подставив w из уравнения (5), имеем:

$$V_{\text{сек}} = \pi\int\limits_0^R r^2 f\left(\tau_{\text{ст}}\frac{r}{R}\right)\mathrm{d}\,r.$$

Поскольку $r = R\tau/\tau_{\text{ст}}$ [из уравнения (3)], то

$$V_{\text{сек}} = \frac{\pi R^3}{\tau_{\text{ст}}^3}\int\limits_0^{\tau_{\text{ст}}} \tau^2 f(\tau)\mathrm{d}\,\tau. \tag{8}$$

Подставив в уравнение (8) $f(\tau)$ в соответствии с реологической моделью различных групп неньютоновских жидкостей, получим расчетные уравнения для ламинарного движения в цилиндрической трубе.

Для бингамовских пластичных жидкостей

$$\tau - \tau_0 = \mu_{\text{пл}}\left(\frac{\mathrm{d}\,w}{\mathrm{d}\,n}\right).$$

Откуда

$$\tau - \tau_0 = \mu_{\text{пл}}\left(\frac{\mathrm{d}\,w}{\mathrm{d}\,n}\right) \quad \text{при} \quad \tau_0 < \tau < \tau_{\text{ст}}, \tag{9}$$

причем $f(\tau) = 0$ при $0 < \tau < \tau_0$.

Известна схема движения бингамовской жидкости в трубе, когда напряжение τ падает до нуля в центре трубы, но существует зона (вблизи осевой линии), где отсутствует скорость сдвига. При подстановке функции (9) в уравнение (8) получим:

$$V_{\text{сек}} = \frac{\pi R^3}{\tau_{\text{ст}}^3}\left[\int\limits_0^{\tau_0} \tau^2 \cdot 0\mathrm{d}\,\tau + \int\limits_{\tau_0}^{\tau_{\text{ст}}} \tau^2\left(\frac{\tau-\tau_0}{\mu_{\text{пл}}}\right)\mathrm{d}\,\tau\right]. \tag{10}$$

После интегрирования имеем:

$$V_{\text{сек}} = \frac{\pi R^3}{\mu_{\text{пл}}\tau_{\text{ст}}^3}\left[\frac{\tau^4}{4} - \frac{\tau^3}{3}\tau_0\right]_{\tau_0}^{\tau_{\text{ст}}} \tag{11}$$

или

$$V_{\text{сек}} = \frac{\pi R^3 \tau_{\text{ст}}}{4\mu_{\text{пл}}}\left[1 - \frac{4}{3}\frac{\tau_0}{\tau_{\text{ст}}} + \frac{1}{3}\left(\frac{\tau_0}{\tau_{\text{ст}}}\right)^4\right]. \tag{12}$$

Подставив в выражение (12) $\tau_{\text{ст}} = 1/2(\Delta p + \Delta p_0)R/l$, получим уравнение, определяющее связь между расходом $V_{\text{сек}}$ бингамовских жидкостей (при их ламинарном течении по цилиндрической трубе) и перепадом давления $(\Delta p + \Delta p_0)$,

$$V_{\text{сек}} = \frac{\pi R^3(\Delta p + \Delta p_0)}{8\mu_{\text{пл}} l}\times$$

$$\times\left[1 - \frac{4}{3}\frac{2l\tau_0}{(\Delta p + \Delta p_0)R} + \frac{1}{3}\left(\frac{2l\tau_0}{(\Delta p + \Delta p_0)}\right)^4\right], \tag{13}$$

где $\mu_{\text{пл}}$ — пластическая вязкость;

τ_0 — предел текучести.

Учитывая, что $V_{\text{сек}} = V_1$, задачу определения времени заполнения формы можно считать решенной.