

УДК 664.7

# Математическая модель процесса намораживания льда на сферической поверхности применительно для аккумуляторов холода

Д-р техн. наук И. Е. ЛОБАНОВ

Московский авиационный институт

125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4

Д-р техн. наук Б. С. БАБАКИН, Р. Б. АЙТИКЕЕВ,

канд. техн. наук М. И. ВОРОНИН, С. Б. БАБАКИН

holod@mgupp.ru

Московский государственный университет пищевых производств

109316, г. Москва, ул. Талалихина, 33

**Предложенное аналитическое решение квазистационарной задачи о намораживании на внешней сферической поверхности с граничными условиями третьего рода на внутренней поверхности и граничными условиями третьего рода на внешней поверхности, более общее, чем существующие, которое необходимо использовать для решения задачи о намораживании льда на рабочих поверхностях аккумуляторов холода.**

**Ключевые слова:** воздухоохладитель, моделирование, аккумуляторы холода, охлаждаемая поверхность, тепло- и массообмен, фазовый переход, сферическая поверхность.

## Mathematical model of the ice build-up process on a spherical surface for cold accumulators

D. Sc. I. E. LOBANOV

Moscow Aviation Institute

125993, Russia, Moscow, Volokolamskoe Shosse, 4

D. Sc. B. S. BABAKIN, R. B. AITIKEEV,

Ph. D. M. I. VORONIN, S. B. BABAKIN

holod@mgupp.ru

Moscow National University of Food Production

125080, Moscow, Volokolamskoye shosse, 11

**An analytical solution is suggested for the quasi-stationary problem of ice build-up on an outer spherical surface with third-order boundary conditions on the inner surface and third-order boundary conditions on the outer surface. More general than the existing ones, this method should be applied to solve the task of ice formation on the working elements of cold accumulators.**

**Keywords:** air cooler, modelling, cold accumulators, cooled surface, heat and mass transfer, phase transition, spherical surface.

В рамках данной работы рассматривается задача затвердевания, т.е. переход вещества из жидкого состояния в твердое условно рассматривается без учета особенностей формирования кристаллов, что следует использовать для решения задачи о намораживании на аккумуляторах холода. Изучается проблема только с учетом тепловых взаимодействий между твердой и жидкой фазами и телами, которые находятся в тепло-

вом контакте между ними. Поскольку решения частных случаев данной задачи, представленные ранее, были получены независимым образом, авторами ставится задача получения решения общего вида для намораживания на сферической поверхности, как на внутренней, так и на внешней, для граничных условий первого и третьего родов. Процесс намораживания на внешней поверхности сферы (см. рис.) описывается следующими дифференциальными уравнениями одномерной нестационарной теплопроводности в сферических координатах

$$c'_1 \rho_1 \frac{\partial t_1}{\partial \tau} = \lambda_1 \left( \frac{\partial^2 t_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t_1}{\partial r} \right), \quad (1)$$

$$\forall r_0 \leq r \leq r_0 + R;$$

$$c' \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right), \quad (2)$$

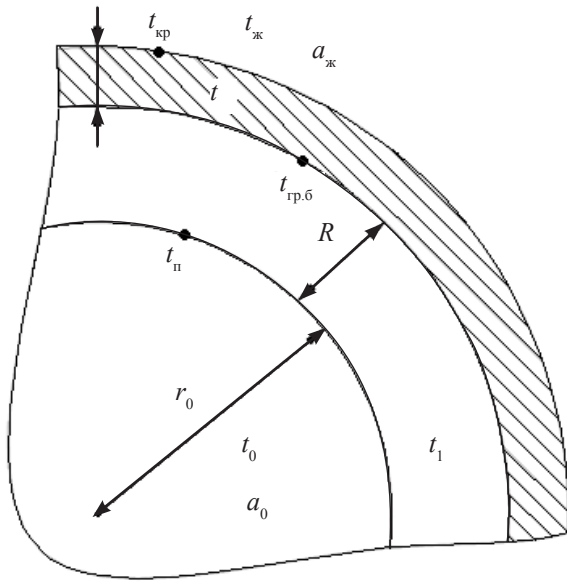
$$\forall r_0 + R \leq r \leq r_0 + R + \xi,$$

где  $\tau$  — время;  $c'$  — теплоемкость замороженного слоя;  $\rho$  — плотность замороженного слоя;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности замороженного слоя;  $t$  — температура замороженного слоя;  $c'_1$  — теплоемкость материала стенки;  $\rho_1$  — плотность материала стенки;  $\lambda_1$  — коэффициент теплопроводности материала стенки;  $t_1$  — температура стенки;  $r$  — текущая радиальная координата, отсчитываемая от центра сферы;  $r_0$  — внутренний радиус полой сферы;  $R$  — радиальная толщина сферы;  $\xi$  — радиальная толщина замороженного слоя.

Граничные условия:

$$t_1|_{r=r_0} = t_n; \quad (3)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \alpha_0 (t_n - t_0); \quad (4)$$



Схематическое изображение модели для решения задачи о намораживании внешней сферической поверхности с граничными условиями III рода на внутренней поверхности

$$t_1 \Big|_{r=r_0+R+\xi} = t_{кр}; \tag{5}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=r_0+R+\xi} = \alpha_{ж}(t_{ж} - t_{кр}) + \rho r \frac{d\xi}{dt}, \tag{6}$$

где  $t_{кр}$  — криоскопическая температура;  $\alpha_{ж}$  — коэффициент теплоотдачи со стороны жидкости;  $t_{ж}$  — температура жидкости;  $r$  — удельная теплота фазового перехода;  $t_0$  — температура холодильного агента;  $\alpha_0$  — коэффициент теплоотдачи со стороны холодильного агента;  $t_n$  — температура стенки со стороны холодильного агента.

Условия сопряжения:

$$t_1 \Big|_{r=r_0+R} = t \Big|_{r=r_0+R} = t_{тр}(\xi); \tag{7}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=r_0+R} = \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=r_0+R}. \tag{8}$$

Задача намораживания решается при граничных условиях третьего рода на внутренней поверхности ( $r = r_0$ ) и граничных условиях третьего рода на внешней поверхности сферы ( $r = r_0 + R + \xi$ ), поскольку эти условия являются более общими, чем рассмотренные ранее.

В данном исследовании основной целью является отыскание именно аналитических решений. Вышеуказанный подход, базирующийся на методе замещения, ранее был применён к решению различного типа задач и является вполне обоснованным.

Следовательно, основным допущением, принятым при решении задачи замораживания на сферической стенке является то, что температура во всех промежутках —  $[r; r_0 + R]$  и  $[r; r_0 + R + \xi]$  — замещается температурами, получающимися при стационарной одномерной теплопроводности в полый сфере.

В дальнейшем, решение задач намораживания получается без дополнительных допущений и, в рамках уже принятых допущений, может считаться точным аналитическим решением.

Стационарное распределение температуры в полый сфере при одномерной теплопроводности выглядит следующим образом:

$$t = C_1 - \frac{C_2}{r}, \quad \forall r_0 + R \leq r \leq r_0 + R + \xi; \tag{9}$$

$$t_1 = C_3 - \frac{C_4}{r}, \quad \forall r_0 \leq r \leq r_0 + R, \tag{10}$$

где  $C_i, i = 1, 2, 3, 4$  — константы.

Вышеуказанные константы находятся из граничных условий и условий сопряжения. Сначала необходимо составить систему уравнений:

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \alpha_0(t_n - t_0) \Rightarrow \lambda_1 \frac{C_4}{r_0^2} = \alpha_0(t_n - t_0); \tag{11}$$

$$t_1 \Big|_{r=r_0+R} = t_{тр} \Rightarrow t_{тр} = C_3 - \frac{C_4}{r_0 + R}; \tag{12}$$

$$t \Big|_{r=r_0+R} = t_{тр} \Rightarrow t_{тр} = C_1 - \frac{C_2}{r_0 + R}; \tag{13}$$

$$t \Big|_{r=r_0+R+\xi} = t_{кр} \Rightarrow t_{кр} = C_1 - \frac{C_2}{r_0 + R + \xi}; \tag{14}$$

Вышеуказанные константы получаются из решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} t_{тр} = C_1 - \frac{C_2}{r_0 + R}; \\ t_{кр} = C_1 - \frac{C_2}{r_0 + R + \xi}; \\ \lambda_1 \frac{C_4}{r_0^2} = \alpha_0(t_n - t_0); \\ t_{тр} = C_3 - \frac{C_4}{r_0 + R}. \end{cases} \tag{15}$$

В развернутой форме константы представлены в виде

$$C_1 = \frac{t_{кр}(r_0 + R + \xi) - t_{тр}(r_0 + R)}{\xi}; \tag{16}$$

$$C_2 = \frac{r_0 \xi + r_0^2 + 2r_0 R + R\xi + R^2}{\xi} t_{кр} - \frac{R\xi + r_0^2 + 2r_0 R + r_0 \xi + R^2}{\xi} t_{тр}; \tag{17}$$

$$C_3 = \frac{\lambda_1 t_{тр} r_0 + \lambda_1 t_{тр} R + \alpha_0 r_0^2 t_n - \alpha_0 r_0^2 t_0}{\lambda_1 (r_0 + R)}; \tag{18}$$

$$C_4 = \alpha_0(t_n - t_0) \frac{r_0^2}{\lambda_1}. \tag{19}$$

Таким образом, стационарное температурное поле в полый сфере будет выжаться следующим образом:

$$t = \frac{t_{кр} r_0 + t_{кр} R + t_{кр} \xi - t_{тр} r_0 + t_{тр} R}{\xi} - \frac{-t_{тр} r_0 \xi + t_{тр} R \xi + t_{кр} r_0^2 + 2r_0 t_{кр} R + r_0 t_{кр} \xi}{r \xi} - \frac{t_{тр} r_0^2 - 2r_0 t_{тр} R + t_{кр} R^2 + R t_{кр} \xi - t_{кр} R^2}{r \xi},$$

$$\forall r_0 + R \leq r \leq r_0 + R + \xi; \tag{20}$$

$$t_1 = \frac{\lambda_1 t_{\text{гп}} r_0 + \lambda_1 t_{\text{гп}} R + \alpha_0 r_0^2 t_{\text{н}} - \alpha_0 r_0^2 t_0}{\lambda_1 (r_0 + R)} - \alpha_0 (t_{\text{н}} - t_0) \frac{r_0^2}{\lambda_1 r}, \quad \forall r_0 \leq r \leq r_0 + R. \quad (21)$$

Далее следует найти температуру  $t_{\text{н}}$  из условия  $t_1|_{r=r_0} = t_{\text{н}}$ :

$$t_{\text{н}} = \frac{\lambda_1 t_{\text{гп}} r_0 + \lambda_1 t_{\text{гп}} R + \alpha_0 r_0^2 t_{\text{н}} - \alpha_0 r_0^2 t_0}{\lambda_1 (r_0 + R)} - \alpha_0 (t_{\text{н}} - t_0) \frac{1}{\lambda_1 r_0}. \quad (22)$$

Решив последнее уравнение, получим

$$t_{\text{н}} = \frac{\lambda_1 t_{\text{гп}} r_0 + \lambda_1 t_{\text{гп}} R + t_0 \alpha_0 r_0 R}{\lambda_1 r_0 + \lambda_1 R + \alpha_0 r_0 R}. \quad (23)$$

В дальнейшем следует найти температуру  $t_{\text{гп}}$  из условия сопряжения (7). Производные температур равны:

$$\frac{\partial t}{\partial r} = -(r_0 + R)(t_{\text{гп}} - t_{\text{кп}}) \frac{(r_0 + R + \xi)}{\xi r^2}; \quad (24)$$

$$\frac{\partial t_1}{\partial r} = -\alpha_0 \left( t_0 - \frac{\lambda_1 t_{\text{гп}} r_0 + \lambda_1 t_{\text{гп}} R + t_0 \alpha_0 r_0 R}{\lambda_1 r_0 + \lambda_1 R + \alpha_0 r_0 R} \right) \frac{r_0^2}{\lambda_1 r^2}. \quad (25)$$

Эти же производные в точке сопряжения равны:

$$\frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=r_0+R} = -(r_0 + R)(t_{\text{гп}} - t_{\text{кп}}) \frac{(r_0 + R + \xi)}{\xi (r_0 + R)^2}; \quad (26)$$

$$\frac{\partial t_1}{\partial r} \Big|_{r=r_0+R} = -\alpha_0 \left( t_0 - \frac{\lambda_1 t_{\text{гп}} r_0 + \lambda_1 t_{\text{гп}} R + t_0 \alpha_0 r_0 R}{\lambda_1 r_0 + \lambda_1 R + \alpha_0 r_0 R} \right) \frac{r_0^2}{\lambda_1 (r_0 + R)^2}. \quad (27)$$

Условие сопряжения (7) для нахождения температуры  $t_{\text{гп}}$ :

$$-(r_0 + R)(t_{\text{гп}} - t_{\text{кп}}) \frac{(r_0 + R + \xi)}{\xi (r_0 + R)^2} = -\alpha_0 \left( t_0 - \frac{\lambda_1 t_{\text{гп}} r_0 + \lambda_1 t_{\text{гп}} R + t_0 \alpha_0 r_0 R}{\lambda_1 r_0 + \lambda_1 R + \alpha_0 r_0 R} \right) \frac{r_0^2}{\lambda_1 (r_0 + R)^2}. \quad (28)$$

Решение (28) дает температуру  $t_{\text{гп}}$ :

$$t_{\text{гп}} = \frac{t_{\text{кп}} \lambda r_0^2 \lambda_1 + \alpha_0 t_0 \lambda_1 r_0^2 \xi + t_{\text{кп}} \lambda r_0^2 \alpha_0 R + r_0 t_{\text{кп}} \lambda \xi \lambda_1 + t_{\text{кп}} \lambda R^2 \alpha_0 r_0 + 2 t_{\text{кп}} \lambda r_0 \lambda_1 R + r_0 t_{\text{кп}} \lambda \xi \alpha_0 R + t_{\text{кп}} \lambda \xi \lambda_1 R + t_{\text{кп}} \lambda R^2 \lambda_1}{\lambda r_0^2 \lambda_1 + \alpha_0 \lambda_1 r_0^2 \xi + \lambda r_0^2 \alpha_0 R + r_0 \lambda \xi \lambda_1 + \lambda R^2 \alpha_0 r_0 + \lambda r_0 \lambda_1 R + r_0 \lambda \xi \alpha_0 R + \lambda \xi \lambda_1 R + \lambda R^2 \lambda_1}. \quad (29)$$

Продолжительность процесса намораживания  $\tau_{\text{н}}$  слоя толщиной  $\xi$  детерминирована из решения дифференциального уравнения (6) после подстановки в него значений соответствующей производной и значения температуры  $t_{\text{гп}}$  из выражения (29):

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=r_0+R+\xi} = -\lambda (r_0 + R)(t_{\text{гп}} - t_{\text{кп}}) \frac{(r_0 + R + \xi)}{\xi r^2} \Big|_{r=r_0+R+\xi} = -\lambda \frac{(r_0 + R)(t_{\text{гп}} - t_{\text{кп}})}{\xi (r_0 + R + \xi)}. \quad (30)$$

После преобразований, решение вышеуказанного дифференциального уравнения относительно продолжительности процесса намораживания  $\tau_{\text{н}}$  слоя толщиной  $\xi$  будет выражаться следующим интегралом:

$$\tau_{\text{н}} = -\rho r \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\frac{(r_0 + R)(t_{\text{кп}} - t_0) r_0^2 \lambda_1 \alpha_0}{\left[ (r_0 \lambda \lambda_1 + \alpha_0 \lambda_1 r_0^2 + r_0 \lambda \alpha_0 R + \lambda \lambda_1 R) \xi + (r_0^2 \lambda \lambda_1 + 2 \lambda \lambda_1 r_0 R + \lambda \alpha_0 r_0^2 R + r_0 \lambda \alpha_0 R^2 + \lambda \lambda_1 R^2) \right] (r_0 + R + \xi)} - \alpha_{\text{ж}} (t_{\text{ж}} - t_{\text{кп}})} \quad (31)$$

Запишем окончательный интеграл (31) в каноническом виде:

$$\tau_{\text{н}} = -\rho r \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\frac{K_1}{K_2 \cdot \xi^2 + K_3 \cdot \xi + K_4} + K_5}, \quad (32)$$

где

$$K_1 = (r_0 + R)(t_{\text{кп}} - t_0) \lambda_1 \lambda \alpha_0 r_0^2;$$

$$K_2 = r_0 \lambda \lambda_1 + \alpha_0 \lambda_1 r_0^2 + r_0 \lambda \alpha_0 R + \lambda \lambda_1 R;$$

$$K_3 = (r_0 + R)(2 r_0 \lambda \alpha_0 R + 2 \lambda \lambda_1 R + 2 r_0 \lambda \lambda_1 + \alpha_0 \lambda_1 r_0^2);$$

$$K_4 = \lambda (r_0 + R)^2 (\lambda_1 r_0 + \lambda_1 R + \alpha_0 r_0 R);$$

$$K_5 = -\alpha_{\text{ж}} (t_{\text{ж}} - t_{\text{кп}}).$$

После проведения интегрирования и соответствующих преобразований, получим окончательное выражение относительно времени намораживания  $\tau_n$  слоя толщиной  $\xi$  в каноническом виде:

$$\tau_n = \frac{\rho r}{K_5} \left( -\xi + 2K_1 \Theta \left[ \operatorname{arctg}(K_5(2K_2\xi + K_3)\Theta) - \right] \right), \quad (33)$$

$$\text{где } \Theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{K_5(4K_1K_2 + 4K_2K_4K_5 - K_3^2K_5)}}.$$

Данное решение является канонической и компактной записью аналогичного решения, полученного ранее, но в отличие от последних, как показывает анализ, имеет обобщенный вид, к которому могут быть приведены аналогичные решения для различных граничных условий и поверхностей намораживания (как для внешней, так и для внутренней сферы). Как видно из окончательных выражений, решения задачи внешнего намораживания при граничных условиях третьего рода на внутренней поверхности и граничных условиях третьего рода на внешней поверхности сферы и при граничных условиях первого рода на внутренней поверхности и граничных условиях третьего рода на внешней поверхности различаются только комплексами  $K$ .

Анализ полученных решений при граничных условиях третьего рода на внутренней поверхности сферы и граничных условиях третьего рода на внешней поверхности сферы показал, что они переходят в решения при граничных условиях первого рода на внутренней поверхности и граничных условиях третьего рода на внешней поверхности при условии  $t_n \rightarrow t_0, \Lambda\alpha_0 \rightarrow \infty$ , что является дополнительным доказательством правильности обоих решений. Полученное в работе аналитическое решение квазистационарной задачи о намораживании (задачи Стефана) на внешней сферической поверхности устанавливает непосредственную зависимость между продолжительностью намораживания и толщиной намороженного слоя в зависимости от геометрических и режимных параметров. В существующих работах показано, что при прочих равных условиях толщина намороженного слоя больше на цилиндрической поверхности, чем на плоской.

Сравнительные расчеты, полученных в исследовании решений, показывают, что при прочих равных условиях толщина намороженного слоя на внешней сфери-

ческой поверхности больше, чем на плоской и цилиндрической поверхностях.

Предложенное аналитическое решение квазистационарной задачи о намораживании на внешней сферической поверхности с граничными условиями третьего рода на внутренней поверхности и граничными условиями третьего рода на внешней поверхности, более общее, чем существующее, которое необходимо использовать для решения задачи о намораживании льда на рабочих поверхностях аккумуляторов холода.

## Список литературы

1. Семенов Е. В., Бабакин Б. С., Воронин М. И., Ласаро М. Моделирование процесса генерации льда и инея на поверхности воздухоохладителя // Вестник Международной академии холода. 2009. №4. С. 5–9.
2. Белозеров Г. А., Бабакин Б. С., Макаров Б. А. Математическое моделирование продолжительности процесса замораживания и плавления эвтектического раствора в аккумуляторах холода // Известия Калининградского государственного технического университета. 2011. №23. С. 141–147.
3. Семенов Е. В., Бабакин Б. С., Воронин М. И., Морехон Л. Моделирование процесса инееобразования на поверхности воздушного прибора охлаждения // Вестник Международной академии холода. 2010. №1. С. 36–39.
4. Семенов Е. В., Бабакин Б. С., Воронин М. И., Выгодин В. А., Бабакин С. Б. Моделирование процесса пневмокриоэлектросепарации сырья биологического происхождения // Вестник Международной академии холода. 2013. №2. С. 62–66.

## References

1. Semenov E. V., Babakin B. S., Voronin M. I., Lasaro M. *Vestnik Mezhdunarodnoj akademii holoda*. 2009. No. 4. pp. 5–9.
2. Belozеров G. A., Babakin B. S., Makarov B. A. *Izvestija Kaliningradskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta*. 2011. No. 23. pp. 141–147.
3. Semenov E. V., Babakin B. S., Voronin M. I., Morehon L. *Vestnik Mezhdunarodnoj akademii holoda*. 2010. No. 1. pp. 36–39.
4. Semenov E. V., Babakin B. S., Voronin M. I., Vygodin V. A., Babakin S. B. *Vestnik Mezhdunarodnoj akademii holoda*. 2013. No. 2. pp. 62–66.