УДК665.1/.3

Особенности течения вязкопластических нелинейных сред в круглых прямых трубах

В.А. АРЕТ, В.В. ПЕЛЕНКО, А.Г. КРЫСИН, Ф.В. ПЕЛЕНКО, Р.Г. ОЛЬШЕВСКИЙ
СПбГУНиПТ

General decision of task for laminar current of visco-plastic non-linear media in circular straight tubes with forming of central kernel into the flow and in the presence of slippage (absence of adherence to the wall) is given.

В работе [2] рассмотрен общий подход при выводе универсальных уравнений ламинарного движения для любых неньютоновских жидкостей. Однако уравнения течения в окончательном виде получены в одном случае для степенной неньютоновской жидкости без учета возможных пластических свойств, а в другом – для линейной вязкопластической среды (жидкости Шведова-Бингама). Задача, подобная последней, решена также в работе [3], в которой рассмотрены случаи течения бингамовских пластичных жидкостей, а также чисто вязких псевдопластичных и дилатантных сред. Наиболее общий подход к решению подобной задачи реализован в работе [1], где использован фундаментальный принцип определения поля скоростей течения, основанный на вариационных методах. Полученные в [1] результаты относятся к течению обобщенной вязкопластичной степенной жидкости, охватывая все вышеперечисленные частные случаи, однако принятые автором [1] граничные условия носят частный характер и базируются на гипотезе прилипания.

Из общего принципа виртуальных работ для произвольной сплошной среды Мосолов и Мясников [4] получили функционал $J(1)$, задача поиска экстремума которой соответствует принципу виртуальных работ (точнее –мощностей) для голономных диссипативных сплошных сред:

$$J = \int_V \varphi(e_{ij}) \cdot dV - \int_V \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dV - \int_S \vec{G} \vec{v} dS \quad ; \tag{1}$$

где V – объем выделенной сплошной среды;

S – площадь выделенного объема;

ρ – плотность среды;

$\vec{F}$ – внешние массовые силы;

$\vec{G}$ – внешние поверхностные силы;

$\vec{v}$ – кинематически допустимые скорости;

$\varphi(e_{ij})$ – диссипативный потенциал;

e_{ij} – тензор скоростей деформации;

$$\varphi(e_{ij}) = \int_0^1 D(\lambda e_{ij}) \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad D(e_{ij}) \sigma_{ij} e_{ij}, \; D \geq 0, \tag{2}$$

$D(e_{ij})$ – функция диссипации, $D = 0$ только когда все e_{ij} равны нулю, что соответствует движению среды как твердого тела;

σ_{ij} – тензор напряжений.

Здесь были сделаны следующие достаточно естественные для многих задач реологии предположения:

- рассматривают медленные движения, что позволяет пренебречь инерционными силами;
- внешние кинематические связи полагают стационарными;
- тензор напряжений полагают симметричным;
- среда несжимаема ($\mathrm{div}\delta \to v = 0$).

Тогда поле возможных перемещений с точностью до масштабного множителя можно отождествить с кинематически допустимым полем скоростей. Экстремум функционала находим по условию Эйлера – Лагранжа.

Настоящая работа посвящена постановке и решению в общем виде задачи ламинарного течения вязкопластических нелинейных сред в круглых прямых трубах с формированием в потоке центрального ядра и при наличии явления проскальзывания (несоблюдение условия прилипания на стенке).

Для определения профиля скоростей в области сдвигового течения воспользуемся известным степенным реологическим уравнением Гершеля-Балкли для нелинейного вязкопластического материала:

$$\tau = \tau_0 + \mu_p \cdot \gamma^n. \tag{3}$$

Это уравнение можно записать в виде:

$$\dot{\gamma} = \frac{dv}{dr} = f(\tau_{(r)}), \tag{4}$$

откуда

$$dv = f(\tau_{(r)}) dr, \tag{5}$$

тогда

$$v_{(r)} = \int f(\tau_{(r)}) dr + C. \tag{6}$$

В рассматриваемом случае

$$f(\tau) = \left[\frac{1}{\mu_p} (\tau - \tau_0) \right]^{\frac{1}{n}}. \tag{7}$$

Для течения в круглой трубе из уравнения равновесия следует:

$$\tau = \frac{r \Delta p}{2l}, \tag{8}$$

тогда

$$f(\tau_{(r)}) = \left[\frac{1}{\mu_p} \left(\frac{r \Delta p}{2l} - \tau_0 \right) \right]^{\frac{1}{n}}. \tag{9}$$

С учетом (7), получим из уравнения (6) условие ста-

ционарности функционала (1), которое примет вид

$$v_{(r)} = \int \left[\frac{1}{\mu_p} \left(\frac{r\Delta p}{2l} - \tau_0 \right) \right]^{\frac{1}{n}} dr + C =$$

$$= \left(\frac{\Delta p}{2l\mu_p} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left(r - \frac{2\tau_0 l}{\Delta p} \right)^{\frac{n+1}{n}} + C; \qquad (10)$$

при $r = R$ постоянная интегрирования запишется:

$$C = v(R) - \left(\frac{\Delta p}{2l\mu_p} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left(R - \frac{2\tau_0 l}{\Delta p} \right)^{\frac{n+1}{n}}. \qquad (11)$$

Не останавливаясь на простейшем случае течения картофельной мезги в условиях нулевой скорости на стенке (условие прилипания), рассмотрим более сложный вариант с учетом явления проскальзывания потока на стенке трубы, обобщающего результаты работы [1].

Условие проскальзывания запишем в виде

$$V(R) = V(r)|_{r=R} = (1 - \varphi) V_{\max}, \qquad (12)$$

где φ – коэффициент прилипания, $0 \le \varphi \le 1$.

С учетом соотношения (12) уравнение (10) примет вид

$$(1 - \varphi) V_{\max} =$$

$$= \frac{2l}{\mu^{1/n} \Delta p} \frac{n}{n+1} \left(R \frac{\Delta p}{2l} - \tau_0 \right)^{\frac{n+1}{n}} + C; \qquad (13)$$

$$C = (1 - \varphi) V_{\max} -$$

$$- \frac{2l}{\mu^{1/n} \Delta p} \frac{n}{n+1} \left(R \frac{\Delta p}{2l} - \tau_0 \right)^{\frac{n+1}{n}}. \qquad (14)$$

Подставляя найденное значение С в (10), получим:

$$V(r) = \frac{2l}{\mu^{1/n} \Delta p} \frac{n}{n+1} \left(r \frac{\Delta p}{2l} - \tau_0 \right)^{\frac{n+1}{n}} -$$

$$- \frac{2l}{\mu^{1/n} \Delta p} \frac{n}{n+1} \left(R \frac{\Delta p}{2l} - \tau_0 \right)^{\frac{n+1}{n}} + (1 - \varphi) V_{\max}; \qquad (15)$$

$$V(R_0) = V_{\text{стержня}} = (1 - \varphi) V_{\max} -$$

$$- \frac{2l}{\mu^{1/n} \Delta p} \frac{n}{n+1} \left(R \frac{\Delta p}{2l} - \tau_0 \right)^{\frac{n+1}{n}}, \qquad (16)$$

так как $V_{\max} = V_{\text{стержня}}$, то

$$V_{\text{стержня}} = - \frac{1}{\varphi} \frac{2l}{\mu^{1/n} \Delta p} \frac{n}{n+1} \left(R \frac{\Delta p}{2l} - \tau_0 \right)^{\frac{n+1}{n}}, \qquad (17)$$

тогда

$$V(r) = \frac{2l}{\mu^{1/n} \Delta p} \frac{n}{n+1} \times$$

$$\times \left[\left(r \frac{\Delta p}{2l} - \tau_0 \right)^{\frac{n+1}{n}} - \frac{1}{\varphi} \left(R \frac{\Delta p}{2l} - \tau_0 \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]. \qquad (18)$$

Полный суммарный расход составит величину:

$$Q = Q_{\text{сдв}} + Q_{\text{стерж}}. \qquad (19)$$

$$Q_{\text{сдв}} = 2\pi \int_{R_0}^{R} V(r) r dr = 2\pi \frac{2l}{\mu^{1/n} \Delta p} \frac{n}{n+1} \times$$

$$\times \int_{R_0}^{R} \left[\left(r \frac{\Delta p}{2l} - \tau_0 \right)^{\frac{n+1}{n}} - \frac{1}{\varphi} \left(R \frac{\Delta p}{2l} - \tau_0 \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] r dr, \qquad (20)$$

после преобразований получим:

$$Q_{\text{сдв}} = \left(- \frac{2l}{\Delta p} \right)^3 \frac{\pi n}{\mu^{1/n} (n+1)} \times$$

$$\times \left\{ \left(R \frac{\Delta p}{2l} - \tau_0 \right)^{\frac{3n+1}{n}} \left[\frac{3n - 2\varphi n + 1}{\varphi (3n+1)} \right] + \right.$$

$$\left. + 2\tau_0 \left(R \frac{\Delta p}{2l} - \tau_0 \right)^{\frac{2n+1}{n}} \left[\frac{2n - \varphi n + 1}{\varphi (2n+1)} \right] \right\}; \qquad (21)$$

$$Q_{\text{стерж}} = 2\pi \int_{R_0}^{R} V_{\text{стерж}} r dr =$$

$$= -2\pi \int_{R_0}^{R} \frac{1}{\varphi} \frac{2l}{\mu^{1/n} \Delta p} \frac{n}{n+1} \left(R \frac{\Delta p}{2l} - \tau_0 \right)^{\frac{n+1}{n}} r dr, \qquad (22)$$

или:

$$Q_{\text{стерж}} = \pi R_0^2 \frac{1}{\varphi} \left(- \frac{2l}{\Delta p} \right) \times$$

$$\times \frac{1}{\mu^{1/n}} \frac{n}{n+1} \left(R \frac{\Delta p}{2l} - \tau_0 \right)^{\frac{n+1}{n}}. \qquad (23)$$

С учетом $R_0 = (2l/\Delta D)\tau_0$ окончательное значение полного суммарного расхода приобретает следующий вид, позволяющий осуществлять гидродинамические расчеты существенно нелинейных вязкопластических материалов, а также конструктивные расчеты аппаратов:

$$Q = \left(- \frac{2l}{\Delta p} \right)^3 \frac{\pi n}{\varphi \mu^{1/n} (n+1)} \times$$

$$\times \left\{ \left(R \frac{\Delta p}{2l} - \tau_0 \right)^{\frac{3n+1}{n}} \left[\frac{3n - 2\varphi n + 1}{\varphi (3n+1)} \right] + \right.$$

$$+ 2\tau_0 \left(R \frac{\Delta p}{2l} - \tau_0 \right)^{\frac{2n+1}{n}} \left[\frac{2n - \varphi n + 1}{\varphi (2n+1)} \right] + \qquad (24)$$

$$\left. + \tau_0^2 \left(R \frac{\Delta p}{2l} - \tau_0 \right)^{\frac{n+1}{n}} \right\}.$$

Список литературы

1. *Арет В.А.* Имитационная и инвариантная реометрия в процессах переработки пищевых масс: Дис... д-ра техн. наук. – Кемерово: КемТИПП, 1981.
2. *Артюшков Л.С.* Динамика неньютоновских жидкостей. – Л.: ЛКИ, 1979.
3. *Гноевой А.В., Климов Д.М., Чесноков В.М.* Основы теории бингамовских сред. – М.: Физматлит, 2004.
4. *Масолов П.П., Мясников В.П.* Вариационные методы теории течения жестковязкопластичных суспензий. – М.: МГУ, 1991.
5. *Романков П.Г., Курочкина М.Н.* Гидромеханические процессы химической технологии. – Л.: Химия, 1982.