

# Расчет теплового поля и поля термомеханических напряжений сильноточного термоэлемента слоистой конструкции

Т.А. ИСМАИЛОВ, О.В. ЕВДУЛОВ, Д.В. ЕВДУЛОВ

Дагестанский государственный технический университет

*It is considered accounting model flaky thermoelement, calculated on greater toks of the feeding. Heat fields and field thermomechanical efforts are received in him. They are shown advantage strongcurrent to flaky design thermoelement before classical П-figurative.*

При проектировании термоэлектрических холодильных установок средней холодопроизводительности (до 1...1,2 кВт) целесообразно использование сильноточных термоэлектрических батарей (ТЭБ), надежность которых повышается за счет уменьшения числа паяных соединений в термоэлементах (ТЭ). Однако при реализации сильноточных ТЭБ в классическом П-образном виде возникает проблема, связанная с обеспечением их термомеханической надежности. В данном конструктивном исполнении ТЭ при увеличении значения тока питания и соответственно удельных тепловых потоков на его холодных и горячих спаях резко возрастают термомеханические напряжения вследствие теплового расширения (сужения) материалов, что во многом оказывается на надежности функционирования ТЭБ. В этих условиях необходимо принятие определенных конструктивных мер для снижения их величины. Авторами ранее были предложены варианты ТЭБ специальной слоистой конструкции [1 – 3], рассчитанные на большие токи питания, в которых величина термомеханических напряжений в ТЭ была значительно снижена. В настоящей работе предлагается к рассмотрению расчет тепловых полей и полей термомеханических напряжений в данной конструкции ТЭ.

Расчетная схема определения теплового поля в слоистом ТЭ приведена на рис.1.

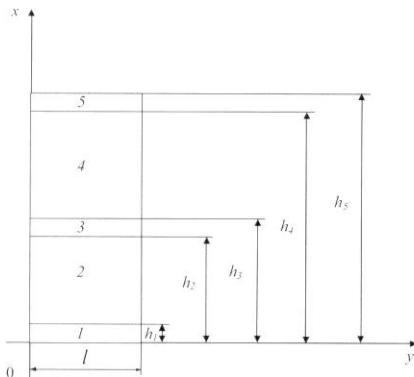


Рис. 1. Расчетная схема:

1, 3, 5 – коммутационные пластины;  
2, 4 – термоэлектрический материал;  $h$  – размер по оси  $x$ ;  
 $l$  – размер по оси  $y$

Система дифференциальных уравнений теплопереноса для этой схемы имеет вид:

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} + j^2 \Omega_1 = c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} \quad (1)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} + j^2 \Omega_2 = c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\lambda_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} + \lambda_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial y^2} + j^2 \Omega_3 = c_3 \frac{\partial T_3}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\lambda_4 \frac{\partial^2 T_4}{\partial x^2} + \lambda_4 \frac{\partial^2 T_4}{\partial y^2} + j^2 \Omega_4 = c_4 \frac{\partial T_4}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\lambda_5 \frac{\partial^2 T_5}{\partial x^2} + \lambda_5 \frac{\partial^2 T_5}{\partial y^2} + j^2 \Omega_5 = c_5 \frac{\partial T_5}{\partial t}, \quad (5)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;

$\Omega$  – удельное электрическое сопротивление;

$j$  – плотность электрического тока;

$c$  – объемная теплоемкость;

$T$  – температура;

$t$  – время.

Начальные, граничные условия и условия сопряжения имеют вид:

$$T_{1,2,3,4} = T_{cp} \text{ при } t = 0; \quad (6)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \beta_{rc}(T_1 - T_{rc}) \text{ при } x = 0, 0 < y < l; \quad (7)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} + a_{12}jT_2 \text{ при } x = h_1, 0 < y < l; \quad (8)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} - a_{23}jT_2 = \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x} \text{ при } x = h_2, 0 < y < l; \quad (9)$$

$$\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x} = \lambda_4 \frac{\partial T_4}{\partial x} - a_{34}jT_4 \text{ при } x = h_3, 0 < y < l; \quad (10)$$

$$\lambda_4 \frac{\partial T_4}{\partial x} + a_{45}jT_4 = \lambda_5 \frac{\partial T_5}{\partial x} \text{ при } x = h_4, 0 < y < l; \quad (11)$$

$$\lambda_5 \frac{\partial T_5}{\partial x} = \beta_{rc}(T_5 - T_{rc}) \text{ при } x = h_5, 0 < y < l; \quad (12)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = \beta(T_1 - T_{cp}) \text{ при } y = 0 \text{ и } l, 0 \leq x \leq h_1; \quad (13)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} = \beta(T_2 - T_{cp}) \text{ при } y = 0 \text{ и } l, h_1 < x \leq h_2; \quad (14)$$

$$\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial y} = \beta(T_3 - T_{cp}) \text{ при } y = 0 \text{ и } l, h_2 < x \leq h_3; \quad (15)$$

$$\lambda_4 \frac{\partial T_4}{\partial y} = \beta(T_4 - T_{cp}) \text{ при } y = 0 \text{ и } l, h_3 < x \leq h_4; \quad (16)$$

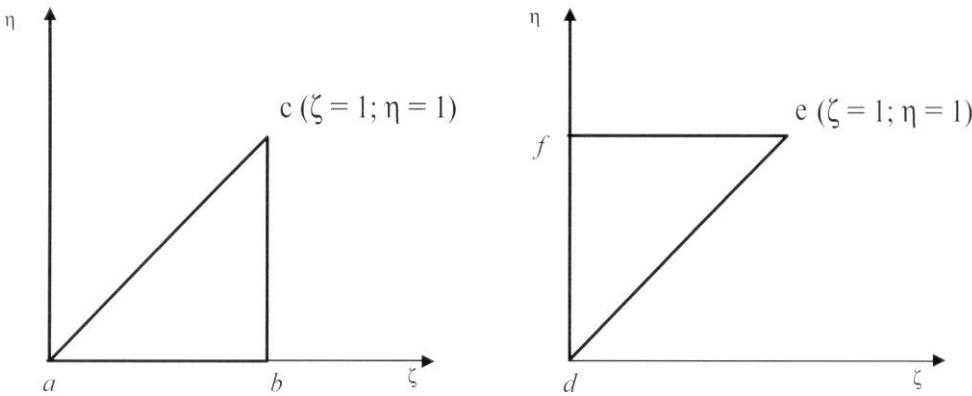


Рис.2. Треугольные изопараметрические элементы двух типов

$$\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial y} = \beta(T_s - T_{cp}) \text{ при } y = 0 \text{ и } l, h_4 < x \leq h_5, \quad (17)$$

где  $T_{rc}$  – температура системы теплосброса;  
 $\beta_{rc}$  – коэффициент теплообмена с системой теплосброса;  
 $T_{cp}$  – температура окружающей среды;  
 $\alpha$  – коэффициент термо-ЭДС.;  
 $\beta$  – коэффициент теплообмена с окружающей средой.

Решение системы уравнений (1) – (5) с соответствующими начальными и граничными условиями (6) – (17) аналитическим методом затруднительно. При этом полученное решение будет непригодно для анализа ввиду большой сложности. В этом случае целесообразно использовать численные методы решения. Для задач со сложной геометрией наиболее оптимальным подходом является поиск решения с помощью метода конечных элементов [4].

Общее решение данной задачи методом конечных элементов осуществляется в следующей последовательности.

Вводится конечно-элементное представление:

$$\tilde{\varphi}(x, y, t) = \tilde{\varphi}_0(x, y, t) + \sum_{k=1}^K N_k(x, y) \varphi_k(t), \quad (18)$$

$$k = 1, 2, \dots, K,$$

где  $K$  – суммарное число узловых точек;

$\tilde{\varphi}_0(x, y, t)$  выбирается так, чтобы точно удовлетворялись начальные и граничные условия;

$N_k(x, y)$  – пробная функция и коэффициент  $\varphi_k(t)$  неизвестны и определяются из системы уравнений, получаемых из исходного уравнения.

Чертой сверху обозначено приближенное решение.

Каждое из исходных уравнений (1) – (5) можно записать в символьном виде:

$$L(T) = 0. \quad (19)$$

Если подставить (19) в (18), то оно не будет тождественно удовлетворяться. Следовательно, можно записать

$$L(T) = R,$$

где  $R$  – невязка уравнения.

Для определения коэффициентов  $j_k(t)$  используется система уравнений Галеркина:

$$\int_D N_m(x, y) R(x, y, t) dx dy = 0, m = 1, \dots, K.$$

Для поиска решения стационарной задачи использованы изопараметрические элементы треугольной формы. На рис. 2 представлены изопараметрические треугольные элементы двух типов. Приближенное решение в этом случае может быть представлено в виде:

$$\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi_a N_a(\zeta, \eta) + \varphi_b N_b(\zeta, \eta) + \varphi_c N_c(\zeta, \eta), \text{ если } x, y \in e_{abc},$$

$$\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi_d N_d(\zeta, \eta) + \varphi_e N_e(\zeta, \eta) + \varphi_f N_f(\zeta, \eta), \text{ если } x, y \in e_{def},$$

где базисные функции  $N_j(x, y)$  определяются как

$$N_a(\zeta, \eta) = 1 - \zeta, N_b(\zeta, \eta) = \zeta - \eta, N_c(\zeta, \eta) = \eta;$$

$$N_d(\zeta, \eta) = 1 - \eta, N_e(\zeta, \eta) = \eta - \zeta, N_f(\zeta, \eta) = \zeta.$$

Выбирая для уменьшения невязки функцию  $R(x, y)$  ортогональной ко всем базисным функциям  $N_k(x, y)$  и учитывая, что они обладают локальным носителем только на элементах, расположенных вокруг точки сетки  $k$ , имеем:

$$(R, N_k) = K_A + K_B + K_C + K_D + K_E + K_F,$$

$$\text{где } K_p = \iint_{e_p} \left( \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial N_k}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \frac{\partial N_k}{\partial y} + 2N_k \right) dx dy, p = A, B, C, D, E, F.$$

Элементы  $A, \dots, F$ , как показано на рис. 3, окруждают точку сетки  $k$ .

По данной методике осуществлен численный расчет температурного поля слоистого ТЭ.

Геометрические размеры исследуемого ТЭ: толщина коммутационных пластин 2 мм, термоэлектрического материала 4 мм, общие размеры  $14 \times 20 \times 4$  мм. Размер ячейки, наложенной на ТЭ конечно-элементной сетки, подбирается исходя из определяющего размера.

В результате расчета получено двумерное температурное поле слоистого ТЭ, а также распределение плотности теплового потока после выхода его на стационарный режим работы. В качестве исходных данных принималось:  $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = 395 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ ,  $\lambda_2 = \lambda_4 = 1,5 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ ,  $\rho_1 = \rho_3 = \rho_5 = 0,0172 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ ,  $\rho_2 = \rho_4 = 10,65 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ ,  $c_1 = c_3 = c_5 = 383 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ ,  $c_2 = c_4 = 123 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ ,  $T_{cp} = 293 \text{ К}$ ,  $T_0 = 291 \text{ К}$ ,  $\alpha = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$ ,  $\beta = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$ ,  $\beta_{rc} = 70 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$ .

Величина теплового потока определялась из соотношения

$$F_{xi} = \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x}; F_{yi} = \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y},$$

$$\text{где } i = 1, \dots, 5.$$

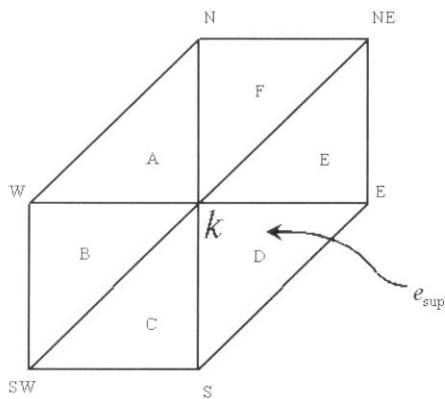


Рис. 3. Шесть треугольных элементов  $e_{\text{sup}}$ , окружающих точку сети  $k$

На рис. 4 и 5 показано соответственно распределение температуры ТЭ вдоль его продольной оси при различной величине тока питания, а также изменение во времени температуры в различных точках слоистого ТЭ.

Как следует из полученных данных, при использовании ТЭ в слоистом исполнении можно получить значительный перепад температур между холодной и горячей коммутационными пластинами при большой величине теплового потока. При перепаде температур между ком-

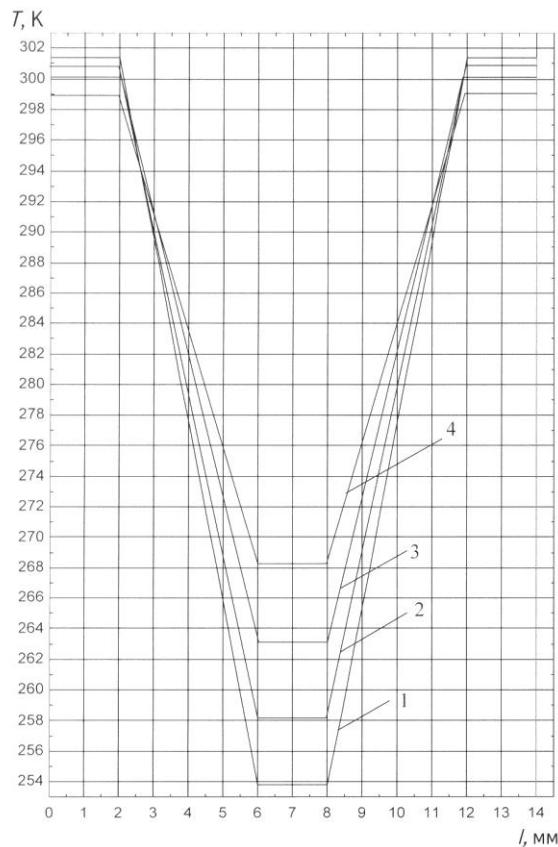


Рис. 4. Распределение температуры ТЭ вдоль продольной оси слоистого ТЭ при различной величине тока питания:  
1 – 140 A; 2 – 120 A; 3 – 100 A; 4 – 80 A

мутационными пластинами в 47 К (см. рис. 4, линия 1) тепловой поток на холодном спае ТЭ, пропорциональный его холодопроизводительности, составляет порядка 18000 Вт/м<sup>2</sup>, что соответствует при данной геометрии ТЭ току питания в 140 А. С уменьшением величины питающего электрического тока значение теплового тока на холодном спае ТЭ и перепад температур между спаями также уменьшаются. Согласно рис. 4 при снижении тока питания ТЭ с 140 А до 80 А перепад температур между спаями ТЭ уменьшается с 47 К до 31 К, соответственно тепловой поток на холодном спае уменьшается с 18000 Вт/м<sup>2</sup> до 12000 Вт/м<sup>2</sup>.

На рис. 5 приведены данные об изменении температуры холодной и горячей коммутационных пластин, а также различных точек ветви ТЭ во времени при токе питания 140 А. Согласно приведенным данным, температура в указанных точках выходит на установившийся режим примерно через 900 с. Данное обстоятельство связано с достаточно большими габаритными размерами ТЭ. При толщине коммутационных пластин 2 мм и высоте ветвей ТЭ 4 мм площадь поперечного сечения равняется

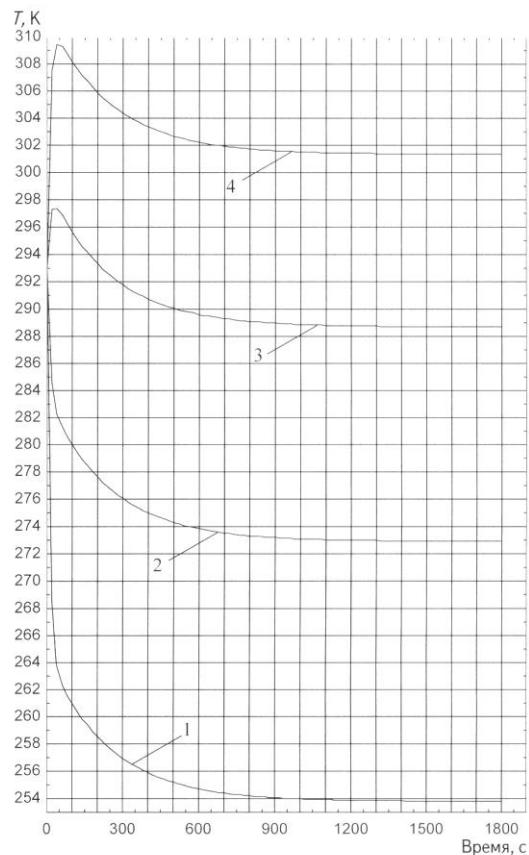


Рис. 5. Изменение температуры в различных точках слоистого ТЭ вдоль продольной оси во времени:  
1 – холодная коммутационная пластина; 2 – ветвь ТЭ на расстоянии 1,5 мм от холодной коммутационной пластины; 3 – ветвь ТЭ на расстоянии 1,5 мм от горячей коммутационной пластины; 4 – горячая коммутационная пластина

$400 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$ . При этом, как следует из расчетных данных, целесообразным будет предусмотреть съем теплоты не только с горячих коммутационных пластин, но и также с близлежащей к ним поверхности ветвей ТЭ. В данном конструктивном исполнении может быть предложен дополнительный теплосъем примерно с  $1/3$  боковой поверхности ТЭ.

Для оценки термомеханических характеристик ТЭ слоистой конструкции был произведен расчет возникающих в нем механических напряжений и деформаций, являющихся следствием теплового расширения материалов.

Расчет производился также с использованием метода конечных элементов. При этом математическая формулировка задачи имела следующий вид.

Температурная деформация материала определяется коэффициентами линейного расширения и изменением температуры относительно температуры недеформированного состояния. Составляющая начальной термической деформации для изотропного материала (для упрощения расчетов термоэлектрический материал, из которого изготавливались ветви ТЭ, также принимался изотропным) имеет вид

$$\{\varepsilon_0\} = (1 + v) \begin{Bmatrix} \gamma \\ \gamma \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T, \quad (20)$$

где  $v$  – коэффициент Пуассона;

$\gamma$  – коэффициент линейного расширения материала;

$\Delta T$  – перепад температуры между деформированным и недеформированным состоянием.

Соотношение между механическими напряжениями  $\sigma$  и деформациями  $\varepsilon$  выражается зависимостью

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}, \quad (21)$$

$$\text{где } [D] = \frac{E}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix} \text{ – матрица упругости;}$$

$E$  – модуль Юнга;

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \delta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \delta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \delta_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta_y}{\partial y} \end{Bmatrix} \text{ – деформация;}$$

$\begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{Bmatrix}$  – компоненты вектора перемещений.

Уравнения статического равновесия имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -f_x; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -f_y, \end{cases} \quad (22)$$

где  $f_x, f_y$  – компоненты вектора плотности объемной силы;  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  – нормальные и касательные механические напряжения по осям  $x$  и  $y$ .

Решение уравнений (20) – (22) совместно с граничными условиями, определяющими наличие по всем граням системы нулевого нормального давления, распределение температуры, определяемое при решении уравнений (1) – (19), а также наличие упругих подвесов в крайних точках ТЭ дают возможность получить двумерную картину механических напряжений, деформаций и перемещений.

Расчеты выполнены при следующих исходных данных:  $E = 1,2 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ ;  $v = 0,3$ ;  $\gamma = 22,2 \cdot 10^{-6} \text{ 1/К}$  для термоэлектрического материала и  $E = 1,2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ;  $v = 0,34$ ;  $\gamma = 16,8 \cdot 10^{-6} \text{ 1/К}$  для медных коммутационных пластин. Предел прочности термоэлектрического материала составляет  $1,0 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ , коммутационных пластин –  $3,2 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ .

Механические напряжения для слоистого ТЭ при токе питания 120 А, что соответствует величине теплового потока  $16000 \text{ Вт/м}^2$ , для указанного конструктивного исполнения ТЭ не выходят за допустимые пределы прочности. Наибольшая нагрузка приходится на места контакта коммутационных пластин с ветвями ТЭ. Здесь величина механической нагрузки достигает значения  $0,9 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$  для коммутационной пластины. Наибольшие механические напряжения в термоэлектрическом материале не превышают  $0,2 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ . В случае слоистой конструкции ТЭ деформации относительно незначительны и связаны

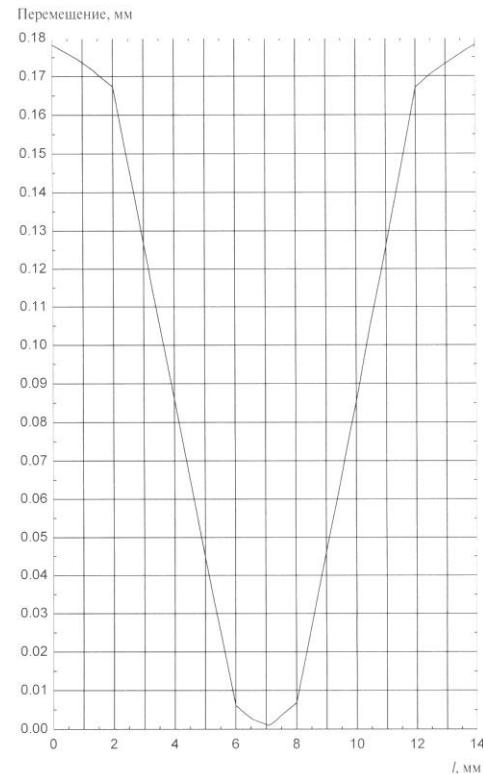


Рис. 6. Картина перемещений вдоль продольной оси слоистого ТЭ

прежде всего с удлинением и расширением ТЭ с боков, что объясняется отсутствием его жесткой фиксации по краям. При этом максимальная величина перемещений согласно рис. 6 не превышает 0,18 мм.

Для сравнения рассмотрена картина механических напряжений при тех же условиях для классического П-образного ТЭ. В данном случае деформации достаточно велики, и при величине тока питания 120 А без применения специальных мер по снижению термомеханических нагрузок механические усилия превышают соответствующий предел прочности материала. Например, для коммутационных пластин встыке с ветвью ТЭ значение механических напряжений выше  $7 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>, что более чем в 2 раза превышает величину предела прочности меди; для термоэлектрического материала соотношение механических нагрузок и предела прочности в данном случае еще выше. При этом в соответствии с проведенными расчетами установлено, что для данной конструкции ТЭ наибольшим током питания без превышения допустимого значения механических нагрузок в системе является электрический ток, не превышающий величины 82 А, т.е. почти в 1,7 раза меньше, чем в случае использования слоистого ТЭ, для которого максимальная величина тока питания по расчетам составляет 140 А.

Таким образом, проведенные расчеты в полной мере подтверждают преимущества слоистой ТЭБ перед ТЭБ, выполненной из ТЭ П-образной формы. В первом случае можно получить более мощную ТЭБ без снижения ее термомеханических характеристик и надежности работы.

#### **Список литературы**

1. Патент РФ на изобретение № 2269183. Термоэлектрическая батарея / Т.А. Исмаилов, М.Г. Вердиев, О.В. Евдулов, Н.Е. Меркухин. Опубл. 27.01.2006, БИ № 3.
2. Патент РФ на изобретение № 2269184. Термоэлектрическая батарея / Т.А. Исмаилов, М.Г. Вердиев, О.В. Евдулов, Н.Е. Меркухин. Опубл. 27.01.2006, БИ № 3.
3. Патент РФ на изобретение № 2280919. Термоэлектрическая батарея / Т.А. Исмаилов, М.Г. Вердиев, О.В. Евдулов, Н.Е. Меркухин. Опубл. 27.07.2006, БИ № 21.
4. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена / Пер. с англ. – М.: Мир, 1988.