УДК 532.5.01

# О корректной постановке задачи течения жидкости в трубе

*Канд. техн. наук* **А. В. ЗАЙЦЕВ**
*Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО*
*Институт холода и биотехнологий*
*191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9*

***In the article the author analyzes various aspects of the mathematical formulation of the general problem of fluid current in the pipeline. In condensed form here are considered classical starting and boundary conditions and their possible alternate versions, variants of turbulent flows modeling are analyzed. For the purpose of obtaining the direct numerical solution of the differential equations system with finite-difference methods it is offered to realize the idea of dynamic change of computing process strategy at each step and at each iteration.***

***Keywords:*** fluid, current in the pipeline, Navier–Stokes equations, turbulence model, finite-difference approximation.

***Ключевые слова:*** жидкость, течение в трубе, уравнения Навье–Стокса, модель турбулентности, конечно-разностная аппроксимация.

В теоретическом плане расчет течения жидкости в трубе — это стандартная задача механики жидкости и газа в общем виде, сформулированная например в [1, 2] и др. Обычно решение такой задачи производят после введения различных упрощений и допущений, связанных с конкретным частным рассматриваемым случаем течения. Тем не менее, в большинстве случаев аналитическое решение получить не возможно и оно ищется с применением приближенных методов вычислительной гидродинамики. Современный уровень развития вычислительных мощностей позволяет снять главное ограничение на технические возможности и довести решение поставленной задачи до количественных результатов, что выводит численный эксперимент на новый уровень значимости и позволяет перейти от теоретических исследований к применимым на практике техническим решениям.

Сформулируем поставленную задачу в общем виде. Имеется труба диаметром $D$ и длиной $L$, с протекающей в ней реальной жидкостью. Жидкость однокомпонентная, химические превращения и перенос излучением отсутствуют. Неизвестные параметры жидкости в любой точке $(x, y, z)$ и в любой момент времени $\tau$ — вектор скорости $w$, давление $p$, температура $T$ и плотность $\rho$ — определяют все остальные свойства и характеристики течения. Никакие дополнительные искусственные ограничения не накладываются.

Математическая формулировка такой задачи включает уравнения движения (Навье–Стокса), неразрывности, энергии и состояния, а также начальные и граничные условия.

Уже на данном этапе постановки задачи возникают вопросы. Существование и гладкость решений уравнений Навье–Стокса, как известно, является одной из семи математических задач тысячелетия, а математическое описание турбулентности — нерешенная проблема физики. Здесь и далее возникают альтернативные варианты дальнейшей формулировки задачи, требующие однозначного принятия решения: поиск частного аналитического решения со многими ограничениями, или численное моделирование с минимальным количеством необходимых допущений; выбор модели учета турбулентности, из которых по крайней мере несколько моделей находят широкое применение, или в случае численного решения — измельчение пространственно-временной сетки вплоть до соизмеримых с вихрем размеров; выбор уравнения состояния, адекватно описывающего взаимосвязь искомых неизвестных параметров, и многое другое. Критерием истинности, в конце концов, является не метод решения задачи, а полученное решение, которое соответствует реальному физическому явлению и при подстановке в исходное уравнение превращает его в тождество.

Формулировка начальных (НУ) и граничных (ГУ) условий предполагает однозначное подробное описание физического состояния жидкости во всех точках рассматриваемой области в начальный момент времени, задание конструктивных параметров трубы (ориентация, размеры, материал и др.), обоснованное задание законов изменения параметров на границах рассчитываемой области. В то же время разные авторы формулируют НУ–ГУ для одних и тех же задач по-разному, не нарушая при этом физической сущности и математической точности получаемого решения.

В дальнейшем выбираем численный метод — конечно-разностную аппроксимацию исходной системы дифференциальных уравнений [3–5], что позволяет в процессе решения рассматривать наиболее близкую по физической сущности и математической постановке задачу. Полученную систему разностных уравнений будем решать итерационным методом, уточняя значения всех неизвестных параметров и коэффициентов в уравнениях на каждой итерации. Такой подход позволит учесть любые нелинейности и при условии обеспечения сходимости получить окончательное решение.

Для трубы круглого сечения наиболее удобно использование цилиндрической системы координат, однако при такой постановке в дальнейшем будет затруднительно распространить результаты моделирования на каналы сложного и переменного сечения, поэтому выбираем декартову систему координат. Погрешность описания гладких скривленных поверхностей будем уменьшать в процессе дробления пространственной сетки вплоть до достижения желаемой точности результата. Здесь используется один из предлагаемых принципов — упрощение математической сложности за счет наращивания вычислительных ресурсов. Из этих же соображений используем не самую эффективную, но самую простую прямоугольную сетку.

Еще одним принципиальным для достижения результата решением является выбор разностной схемы. Количество разностных схем и их комбинаций практически неограниченно. Сюда входят: размеры и соотношения шагов пространственно-временной сетки; множество видов разностной аппроксимации отдельных членов системы дифференциальных уравнений; законы изменения пространственно-временной сетки и аппроксимационных уравнений в процессе расчета и др. Именно эти параметры определяют сходимость вычислительного процесса к решению, под которой традиционно понимается стремление решения конечно-разностного аналога уравнения в частных производных к решению исходного уравнения (для одинаковых начальных и граничных условий) при измельчении сетки.

Обычно необходимым условием сходимости разностной схемы для получения решения корректно поставленной задачи является выполнение условий устойчивости, когда на каждом шаге и на каждой итерации любая ошибка (погрешность округления, погрешность аппроксимации, просто ошибка) не возрастает при переходе от одного шага к другому. Аналитически доказать в нашем случае сходимость невозможно, поэтому остается единственная возможность — численный эксперимент. Подобный подход реализован в частности в [6]. Методика проведения численного эксперимента для определения условий сходимости находится на стадии разработки; ее применение для динамического изменения стратегии вычислительного процесса на каждом шаге и на каждой итерации может оказаться серьезным продвижением при решении сложнейших физических и математических задач.

Стандартным набором ГУ при расчете течения жидкости в трубе является задание скорости $w_в$ и давления $p_в$ потока во входном сечении и давления (или другого параметра) в некотором конечном сечении, а также задание скорости и граничных условий II рода для температуры (теплопередача теплопроводностью в пристеночном слое жидкости) на стенке трубы. Здесь также имеются противоречия.

Не принято задавать градиент скорости или давления на входе/выходе трубы, т. к. эта величина является результатом расчета. На самом деле в математическом смысле такие условия не являются ошибочными, более того, они могут быть сформулированы в результате физического эксперимента и тем самым учитывать характеристики реального нагнетающего устройства на входе или на выходе потока из аппарата. При моделировании динамики пускового режима на входе в трубу следует задать скачкообразное изменение скорости и давления. В математическом плане — это разрыв, что требует особого подхода к поиску решения, но переход в методе конечных разностей от бесконечно малых дифференциалов к конечным разностям автоматически предопределяет некоторое сглаживание во времени и описывает неразрывный с физической точки зрения процесс. Тем не менее интересным является задание на входе в трубу ($z = 0$) в начальный промежуток времени $0 \le \tau \le \tau_в$ рост давления до $p_в$ и скорости до $w_в$ в соответствии с определенным законом изменения, например, линейным: $p(\tau) = p_н + (p_в - p_н)\tau/\tau_в$, $w(\tau) = w_в\,\tau/\tau_в$.

Скорость на стенке обычно задают нулевой (условие «прилипания»), считая, что «проскальзывание» молекул вдоль стенки возникает только для очень больших скоростей при течении сильно разреженных газов. В этом случае применяют различные модели ламинарного и турбулентного потоков, например, достаточно простую в применении теорию пути смешения.

Однако, известен феномен скачкообразного роста скорости потока в результате включения механизма «проскальзывания», который в частности наблюдался на реальном эксперименте при течении некоторых многокомпонентных жидкостей в результате выжимания жирной фракции из ядра потока к стенке трубы. Поэтому в определенных случаях при расчете течения реальных жидкостей следует закладывать в ГУ на стенке коэффициент проскальзывания $0 \le c \le 1$, а скорость на стенке определять, например, через скорость в ядре потока $w_w = cw_c$. Похожий подход применен в [7] путем введения так называемых «скользящих» величин скорости у стенки или в [8] — введением скольжения для учета ламинарного подслоя в вихревой трубе.

Для задания температуры на стенке рассмотрим один из характерных случаев, когда к текущей по трубе жидкости подводится извне теплота с заданной плотностью теплового потока $q$. В качестве граничного условия принято считать, что теплота отводится от стенки за счет теплопроводности жидкости. Тепловые сопротивления процессов теплопроводности жидкости в прилегающем к стенке слое (кондуктивный процесс) и теплоотдачи от нагреваемой стенки к потоку жидкости (конвективный процесс) существенно зависят от скорости, геометрии и типа жидкости и могут сильно различаться. Поэтому оправданным следует считать задание температуры на стенке по итогам экспериментальных исследований, т. е. с использованием эмпирической характеристики — коэффициента теплоотдачи α: $T_w = T_c + q/\alpha$.

Весь процесс постановки задачи и получения решения очень сильно зависит от выбора модели турбулентности. При использовании различных полуэмпирических моделей феноменологического типа, связанных с тем или иным способом замыкания осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, возможно получение решений различных инженерных задач с применением распространенных программных продуктов, например ANSYS или FLUENT.

С другой стороны с целью всестороннего изучения внутренних процессов в турбулентных течениях при реальных усложняющих факторах в последние годы все чаще делаются попытки прямого численного моделирования турбулентности, базирующегося на решении уравнений Навье — Стокса, или моделирования крупных вихрей с использованием так называемых моделей подсеточного масштаба для преодоления вычислительных проблем, связанных с представлением очень мелких вихрей на выбранной расчетной сетке [9]. На международном семинаре в 1998 г. в Оксфорде численное моделирование турбулентности и моделирование крупными вихрями было признано одним из трех актуальных научных направлений современной вычислительной гидродинамики. Вызвано такое решение очень большими потребностями вычислительных ресурсов — времени и памяти, даже при решении простых задач. Применение неравномерных расчётных сеток, параллельных машин и других новых методологических и технических решений позволяет постепенно расширять круг решаемых задач.

Таким образом, наиболее интересной с научной точки зрения представляется постановка задачи прямого численного решения системы дифференциальных уравнений конечно-разностными методами при наличии реальных усложняющих факторов. Невозможность получения такого решения не доказана. По мнению автора, множество существующих разработок в области математического описания различных аспектов течения жидкости следует подкрепить соответствующим развитием методов и алгоритмов численного анализа, направленных на серьезное увеличение скорости и радиуса сходимости. В частности, идея динамического изменения стратегии вычислительного процесса на каждом шаге и на каждой итерации может быть применена к виду и размеру разностной сетки, разностным аппроксимациям уравнений в различных узлах, коэффициентам релаксации и другим вводимым в схему коэффициентам, совмещению/разделению итерационных процессов расчета для различных переменных и многое другое, что, естественно, не должно противоречить корректной постановке задачи и должно быть проверено на большом количестве численных экспериментов.

## Список литературы

1. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Дрофа, 2003.

2. *Валландер С. В.* Лекции по гидроаэромеханике. 2-е изд./Под ред. Н. Н. Полякова. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005.

3. *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. — М.: Мир, 1990.

4. Численные методы исследования течений вязкой жидкости/А. Д. Госмен, В. М. Пан, А. К. Ранчел и др./Пер. с англ. — М.: Мир, 1972.

5. *Патанкар С. В.* Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах. Пер. с англ. — М.: Изд-во МЭИ, 2003.

6. *Зайцев А. В.* Разработка алгоритма решения уравнений Навье–Стокса для течения криогенной жидкости в трубе // Вестник МАХ. 2011. № 3.

7. *Патанкар С. В., Сполдинг Д.* Тепло- и массообмен в пограничных слоях. Пер. с англ. — М.: Энергия, 1971.

8. *Полянский А. Ф., Скурин Л. И.* Моделирование течений жидкости и газа в вихревой трубе и струе // Математическое моделирование. 2001. Т. 13. № 7.

9. *David C. Wilcox.* Turbulence modeling for CFD. — DCW Industries, Inc. 1998.