УДК 621.57.01

Способ осреднения уравнений гидродинамики для расчета движения рабочих сред в холодильных системах

Д-р техн.наук, проф. **Б.С.БАБАКИН**, *д-р техн. наук, проф.* **В.Ф.ШИРИКОВ**
Московский государственный университет прикладной биотехнологии

One of the methods of averaging the hydrodynamics equations and their completing is considered in case when the initial functions are wellbehaved on coordinates and time.

При проектировании теплообменных аппаратов и трубопроводов холодильных систем одним из основных расчетов является гидродинамический расчет движения рабочих сред. В основу гидродинамического расчета положены уравнения Навье-Стокса, с помощью которых описывается движение исследуемой среды. При решении таких уравнений даже в простейших случаях сталкиваются со значительными математическими трудностями. Однако во многих практических задачах нужно получить лишь осредненные характеристики по некоторому статистическому «ансамблю» гидродинамического поля. Представляя исходные гидродинамические элементы как осредненные величины, на которые накладываются их возмущения, многие исследователи пытались замкнуть исходную систему уравнений относительно осредненных величин посредством различных гипотез. Основными можно считать гипотезу Прандтля о постоянстве пути смещения [1] и гипотезу Колмогорова-Обухова [2] об однородности и изотропности мелкомасштабного спектра турбулентности. На основе этих гипотез было построено много полуэмпирических моделей. Каждая такая модель неплохо описывает развитие и процесс турбулентного движения рабочей среды или его вырождение только для конкретных задач в определенном интервале изменения чисел Рейнольдса и зависит от параметров рабочей среды. Выявление пути перехода от одной математической модели к другой представляется проблематичным.

Рассмотрим один из способов осреднения уравнений гидродинамики и их замыкания в случае, когда исходные функции являются регулярными по координатам и времени.

Запишем исходную систему уравнений Навье-Стокса, в которой для простоты дальнейших рассмотрений проведены некоторые упрощения:

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau}+\frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}+\sigma_i T+\nu\Delta u_i; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}+\frac{\partial u_j T}{\partial x_j}=-(\gamma_a-\gamma)u_3+\lambda\Delta T; \qquad (3)$$

где $\gamma_a-\gamma$ – сухоадиабатический градиент;

$$\Phi = RT_{ср}\frac{p'}{\widetilde{p}(z)}; \quad \sigma_i=\left(0,0,\frac{g}{T_{ср}}\right);$$

ν и λ – коэффициенты кинематической вязкости и теплопроводности соответственно;

R – газовая постоянная;

$u_1=u$, $u_2=V$, $u_3=W$ – компоненты вектора скорости;

T – отклонение температуры от ее стандартного распределения по высоте $\widetilde{T}(z)$;

$T_{ср}$ – средняя температура атмосферы;

p' – отклонение давления от стандартного $\widetilde{p}(z)$;

g – ускорение свободного падения.

Представим все гидродинамические поля в виде

$$u_i=\overline{u_i}+u_i'; \; \Phi=\overline{\Phi}+\Phi'; \; T=\overline{T}+T', \qquad (4)$$

(черточками обозначены осредненные значения).

Введем осредненную функцию:

$$\overline{f_i}=\frac{1}{V}\int_V f_i(\tau+\tau_0,x+x_0)\,d\tau dx; \qquad (5)$$

$$V(\tau,x)=2^4\tau l_1 l_2 l_3; \; x=(x_1,x_2,x_3),$$

где τ и l_i – масштабы осреднения по времени и координатам.

Осредняя уравнения (1) – (3) в соответствии с (5), получим уравнения Рейнольдса:

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial \tau}+\frac{\partial \overline{u}_j\overline{u}_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial x_i}+\sigma_i\overline{T}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}+\xi_{x_ix_j}\right);$$

$$\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j}=0; \qquad (6)$$

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \tau}+\frac{\partial \overline{u}_j\overline{T}}{\partial x_j}=-(\gamma_a-\gamma)u_3+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j}+\xi_{x_jT}\right),$$

где $\xi_{x_ix_j}=-(\overline{u_ju_i}-\overline{u}_i\overline{u}_j)$ – тензор турбулентных напряжений Рейнольдса;

$$\xi_{x_jT}=-(\overline{u_jT}-\overline{u_iT}).$$

Введем следующие обозначения:

$$Д_\tau=\frac{\partial}{\partial \tau};\ Д_i=\frac{\partial}{\partial x_i};\ A(n)=\begin{cases}1, \text{ если } n-\text{четное},\\ 0, \text{ если } n-\text{нечетное}.\end{cases}$$

Покажем, что если u_i – регулярные функции по координатам и времени, то тензор напряжений для осредненных движений будет таким:

$$\xi_{x_ix_j}=-\sum_{p_i=1}^{\infty}\sum_{p_j=1}^{\infty}\frac{1}{p_i!p_j!}\times$$
$$\times\sum_{m_i=0}^{p_i}\sum_{l_i=0}^{m_i}\sum_{k_i=0}^{p_i-m_i}\sum_{m_j=0}^{p_j}\sum_{l_j=0}^{m_j}\sum_{k_j=0}^{p_j-m_j}C_{p_i}^{m_i}C_{m_i}^{l_i}C_{p_i-m_i}^{k_i}\times$$
$$\times C_{p_j}^{m_j}C_{m_j}^{l_j}C_{p_j-m_j}^{k_j}\left\{\frac{A(l_i+l_j)}{(l_i+l_j+1)}\times\right.$$
$$\times\frac{A(m_i+m_j-l_i-l_j)}{(m_i+m_j-l_i-l_j+1)}\frac{A(k_i+k_j)}{(k_i+k_j+1)}\times$$
$$\times\frac{A(p_i+p_j-m_i-m_j-k_i-l_j)}{(p_i+p_j-m_i-m_j-k_i-k_j+1)}-$$
$$-\frac{A(l_i)A(l_j)}{(l_i+1)(l_j+1)}\frac{A(m_i-l_i)A(m_j-l_j)}{(m_i-l_i+1)(m_j-l_j+1)}\times$$
$$\times\frac{A(k_i)A(k_j)}{(k_i+1)(k_j+1)}\times$$
$$\left.\times\frac{A(p_i-m_i-k_i)A(p_j-m_j-k_j)}{(p_i-m_i-k_i+1)(p_j-m_j-k_j+1)}\right\}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_3=0}^{\infty}\beta_{2n_0}^0\times$$
$$\times\beta_{2n_1}^1\beta_{2n_2}^2\beta_{2n_3}^3\left[(\tau Д_\tau)^{2n+l_i}(l_1Д_1)^{2n_1+m_i-l_i}\times\right.$$
$$\left.\times(l_2Д_2)^{2n_2+k_i}(l_3Д_3)^{2n_3+p_i-m_i-k_i}\right]\overline{u_i}\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_3=0}^{\infty}\beta_{2n_0}^0\beta_{2n_1}^1\beta_{2n_2}^2\beta_{2n_3}^3\left[(\tau Д_\tau)^{2n+l_j}(l_1Д_1)^{2n_1+m_j-l_j}\times\right.$$
$$\left.\times(l_2Д_2)^{2n_2+k_j}(l_3Д_3)^{2n_3+p_j-m_j-k_j}\right]\overline{u}_j, \qquad (7)$$

где $\beta_0^k=1,\ \beta_{2n_k}^k=\sum_{m=0}^{n_k-1}\frac{1}{(2(n_k-m)+1)!}\beta_{2m}^k,\ k=0,1,2,3.$

Для доказательства соотношения (7) представим u_i в виде степенного ряда в точке (τ_0,x_0):

$$u_i(\tau'+\tau_0,x'+x_0)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\tau Д_\tau+x_1'Д_1+x_2'Д_2+x_3'Д_3)^n u_i(\tau_o,x_0)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n-m}C_n^mC_m^lC_{n-m}^k\times$$
$$\times\left[(\tau'Д_\tau)^l(x_1'Д_1)^{m-l}(x_2'Д_2)^k\times\right.$$
$$\left.\times(x_3'Д_3)^{n-m-k}\right]u_i(\tau_0,x_0), \qquad (8)$$

где $x=x_0+x'$.

Применим к u_i операцию осреднения (5). После интегрирования получим:

$$u_i=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n-m}C_n^mC_m^lC_{n-m}^k\frac{A(l)}{(l+1)}\times$$
$$\times\frac{A(m-l)}{(m-l+1)}\frac{A(k)}{(k+1)}\frac{A(n-m-k)}{(n-m-k+1)}\times$$
$$\times\left[(\tau Д_\tau)^l(l_1Д_1)^{m-l}(l_2Д_2)^k(l_3Д_3)^{n-m-k}\right]u_i(\tau_0,x_0)=$$
$$=\sum_{p_i=0}^{\infty}\sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{\infty}\sum_{p_3=0}^{\infty}\left[\frac{(\tau Д_\tau)^{2p_i}}{(2p_i+1)!}\frac{(l_1Д_1)^{2p_1}}{(2p_1+1)!}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{(l_2Д_2)^{2p_2}}{(2p_2+1)!}\frac{(l_3Д_3)^{2p_3}}{(2p_3+1)!}\right]u_i(\tau_0,x_0)=L(u_i). \qquad (9)$$

Аналогично представим выражение $\overline{u_iu_j}$:

$$\overline{u_iu_j}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\frac{1}{n!n_1!}\times$$
$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}C_n^mC_m^lC_{n-m}^kC_{n_1}^{m_1}C_{m_1}^{l_1}C_{n_1-m_1}^{k_1}\times$$
$$\times\frac{A(l+l_1)}{(l_1+l_1+1)}\frac{A(m+m_1-l-l_1)}{(m+m_1-l-l_1+1)}\frac{A(k+k_1)}{(k+k_1+1)}\times$$
$$\times\frac{A(n+n_1-m-m_1-k-k_1)}{(n+n_1-m-m_1-k-k_1+1)}\times$$

$$\times\left[(\tau Д_\tau)^l (l_1 Д_1)^{m-l} (l_2 Д_2)^k (l_3 Д_3)^{n-m-k}\right]\times$$

$$\times u_i\left[(\tau Д_\tau)^{l_1} (l_1 Д_1)^{m_1-l_1} \times (l_2 Д_2)^{k_1} (l_3 Д_3)^{n_1-m_1-k_1}\right]u_j. \quad (10)$$

Представим также в виде степенного ряда и второй член в выражении для турбулентных напряжений Рейнольдса (7):

$$\overline{u_i u_j} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\frac{1}{n!n_1!}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-m}\sum_{m_1=0}^{n_1}\sum_{l_1=0}^{m_1}\sum_{k_1=0}^{n_1-m_1} C_n^m C_m^l C_{n-m}^k C_{n_1}^{m_1} C_{m_1}^{l_1} C_{n_1-m_1}^{k_1}\times$$

$$\times\frac{A(l)}{(l+1)}\frac{A(m-l)}{(m-l+1)}\frac{A(k)}{(k+1)}\times$$

$$\times\frac{A(n-m-k)}{(n-m-k+1)}\frac{A(l_1)}{(l_1+1)}\frac{A(m_1-l_1)}{(m_1-l_1+1)}\times$$

$$\times\frac{A(k_1)}{(k_1+1)}\frac{A(n_1-m_1-k_1)}{(n_1-m_1-k_1+1)}\times$$

$$\times\left[(\tau Д_\tau)^l (l_1 Д_1)^{m-l} (l_2 Д_2)^k (l_3 Д_3)^{n-m-k}\right]u_i\times$$

$$\times\left[(\tau Д_\tau)^{l_1} (l_1 Д_1)^{m_1-l_1} (l_2 Д_2)^{k_1} (l_3 Д_3)^{n_1-m_1-k_1}\right]u_j. \quad (11)$$

Вычитая из (10) выражение (11), получим представление для напряжений Рейнольдса в виде следующего степенного ряда:

$$\xi_{x_i x_j} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i}\,\overline{u_j} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\frac{1}{n!n_1!}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n-m}\sum_{m_1=0}^{n_1}\sum_{l_1=0}^{m_1}\sum_{k_1=0}^{n_1-m_1} C_n^m C_m^l C_{n-m}^k\times$$

$$\times C_{n_1}^{m_1} C_{m_1}^{l_1} C_{n_1-m_1}^{k_1}\left\{\frac{A(l+l_1)}{(l+l_1+1)}\times\right.$$

$$\times\frac{A(m+m_1-l-l_1)}{(m+m_1-l-l_1+1)}\frac{A(k+k_1)}{(k+k_1+1)}\times$$

$$\times\frac{A(n+n_1-m-m_1-k-k_1)}{(n+n_1-m-m_1-k-k_1+1)}-$$

$$-\frac{A(l)}{(l+1)}\frac{A(l_1)}{(l_1+1)}\frac{A(m-l)}{(m-l+1)}\frac{A(m_1-l_1)}{(m_1-l_1+1)}\times$$

$$\times\frac{A(k)}{(k+1)}\frac{A(k_1)}{(k_1+1)}\frac{A(n-m-k)}{(n-m-k+1)}\times$$

$$\left.\times\frac{A(n_1-m_1-k_1)}{(n_1-m_1-k_1+1)}\right\}\left[(\tau Д_\tau)^l (l_1 Д_1)^{m-l}\times\right.$$

$$\left.\times(l_2 Д_2)^k (l_3 Д_3)^{n-m-k}\right]u_i\times$$

$$\times\left[(\tau Д_\tau)^{l_1} (l_1 Д_1)^{m_1-l_1} (l_2 Д_2)^{k_1} (l_3 Д_3)^{n_1-m_1-k_1}\right]u_j. \quad (12)$$

Найдем обратное отображение $u_i = L^{-1}(\overline{u_i})$. Для этого снова представим u_i в виде степенного ряда по координатам и времени в точке (τ_0, x_0):

$$u_i(\tau,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\tau' Д_\tau)^n u_i(\tau_0, x_{01}+x_1', x_{02}+x_2', x_{03}+x_3'); \quad (13)$$

$$u_i(\tau_0,x) = \sum_{n_1=0}^{\infty}\frac{1}{n_1!}(x_1' Д_1)^{n_1} u_i(\tau_0, x_{01}, x_{02}+x_2', x_{03}+x_3'); \quad (14)$$

$$u_i(\tau_0,x_1,x_2,x_3) = \sum_{n_2=0}^{\infty}\frac{1}{n_2!}(x_2' Д_2)^{n_2} u_i(\tau_0, x_{01}, x_{02}, x_{03}+x_3'); \quad (15)$$

$$u_i(\tau_0,x_{01},x_{02},x_{03}) = \sum_{n_3=0}^{\infty}\frac{1}{n_3!}(x_3' Д_3)^{n_3} u_i(\tau_0, x_{01}, x_{02}, x_{03}). \quad (16)$$

Снова проведем операцию осреднения над выражениями (13) – (16):

$$\overline{u_i} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(\tau Д_\tau)^{2n}\overline{u_i}^{x_1x_2x_3} = L_\tau(\overline{u_i}^{x_1x_2x_3}); \quad (17)$$

$$\overline{u_i}^{x_1x_2x_3} = \sum_{n_1=0}^{\infty}\frac{1}{(2n_1+1)!}(l_1 Д_1)^{2n_1}\overline{u_i}^{x_2x_3} = L_1(\overline{u_i}^{x_2x_3}); \quad (18)$$

$$\overline{u_i}^{x_2x_3} = \sum_{n_2=0}^{\infty}\frac{1}{(2n_2+1)!}(l_2 Д_2)^{2n_2}\overline{u_i}^{x_3} = L_2(\overline{u_i}^{x_3}); \quad (19)$$

$$\overline{u_i}^{x_3} = \sum_{n_3=0}^{\infty}\frac{1}{(2n_3+1)!}(l_3 Д_3)^{2n_3} u_i = L_3(u_i), \quad (20)$$

где $\overline{u_i}^{x_1x_2x_3}, \overline{u_i}^{x_2x_3}, \overline{u_i}^{x_3}$ – осредненные скорости соответственно по τ, x_1, x_2.

Далее покажем, что если для любого k выполняется равенство

$$\overline{f}_{2k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n} f_{2(n+k)}(x) = L(f),\ \alpha_0 = 1, \quad (21)$$

то существует обратный оператор L^{-1}:

$$f_{2p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\beta_{2n}\overline{f}_{2(n+p)}(x), \quad (22)$$

где $\beta_0 = 1,\ \beta_{2m} = -\sum_{i=0}^{m-1}\alpha_{2(m-i)}\beta_{2i}$.

Для подтверждения данного равенства запишем выражение (21) при $k = p$ и $k = p + 1$:

$$f_{2p} = \overline{f}_{2p} - \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n} f_{2(n+p)} =$$

$$= \beta_0\overline{f}_{2p} - \alpha_2 f_{2(p+1)} - \sum_{n=2}^{\infty}\alpha_{2n} f_{2(n+p)}; \quad (23)$$

$$f_{2(p+1)}=\overline{f}_{2(p+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}f_{2(n+p+1)}. \qquad (24)$$

Подставляя (24) в соотношение (23), получим

$$f_{2p}=\beta_0\overline{f}_{2p}-\alpha_2\overline{f}_{2(p+1)}+\sum_{n=2}^{\infty}(\alpha_2\alpha_{2(n-1)}-\alpha_{2n})f_{2(n+p)}=$$

$$=\sum_{q=0}^{1}\beta_{2q}\overline{f}_{2(q+p)}+\sum_{n=2}^{\infty}(-\beta_2\alpha_{2(n-1)}-\beta_0\alpha_{2n})f_{2(n+p)}, \qquad (25)$$

где $\beta_2 = -\beta_0\alpha_2$.

По индукции предположим, что верно равенство

$$f_{2p}=\sum_{q=0}^{N}\beta_{2q}\overline{f}_{2(p+q)}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(-\sum_{m=0}^{N}\alpha_{2(n-m)}\beta_{2m}\right)f_{2(n+p)}=$$

$$=\sum_{q=0}^{N}\beta_{2q}\overline{f}_{2(q+p)}-\sum_{m=0}^{N}\alpha_{2(N+1-m)}\beta_{2m}f_{2(N+1+p)}-$$

$$-\sum_{n=N+2}^{\infty}\sum_{m=0}^{N}\alpha_{2(n-m)}\beta_{2m}f_{2(n+p)}. \qquad (26)$$

Здесь $\beta_{2q}=-\sum_{i=0}^{q-1}\alpha_{2(q-i)}\beta_{2i}$.

По аналогии с (23) представим выражение (21) для $k = N + 1 + p$ и затем подставим в (26). В результате получим следующее соотношение:

$$f_{2p}=\sum_{q=0}^{N}\beta_{2q}\overline{f}_{2(p+q)}-\sum_{m=0}^{N}\alpha_{2(N+1-m)}\beta_{2m}\overline{f}_{2(N+1+p)}+$$

$$+\sum_{m=0}^{N}\alpha_{2(N+1-m)}\beta_{2m}\sum_{n=N+2}^{\infty}\alpha_{2(n-N-1)}f_{2(n+p)}-$$

$$-\sum_{n=N+2}^{\infty}\sum_{m=0}^{N}\alpha_{2(n-m)}\beta_{2m}f_{2(n+p)}=$$

$$=\sum_{q=0}^{N+1}\beta_{2q}\overline{f}_{2(p+q)}-\sum_{n=N+2}^{\infty}\sum_{m=0}^{N}\alpha_{2(n-m)}\beta_{2m}f_{2(n+p)}, \qquad (27)$$

где $\beta_{N+1}=-\sum_{i=0}^{N}\alpha_{2(N+1-i)}\beta_{2i}$.

Таким образом, приведенные выражения (21) – (22) достоверны. После этого рассмотрим соотношение (7). Для выяснения его достоверности, используя выражение (22), найдем обратные операторы L_3^{-1}, L_2^{-1}, L_1^{-1}, L_τ^{-1},:

$$\overline{u}^{x_1x_2x_3}=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{2n}^{0}(\tau Д_\tau)^{2n}\overline{u}_i=L_\tau^{-1}(\overline{u}_i); \qquad (28)$$

$$\overline{u}_i^{x_2x_3}=\sum_{n_1=0}^{\infty}\beta'_{2n_1}(l_1Д_1)^{2n_1}\overline{u}_i^{x_1x_2x_3}=L_1^{-1}(\overline{u}_i^{x_1x_2x_3}); \qquad (29)$$

$$\overline{u}_i^{x_3}=\sum_{n_2=0}^{\infty}\beta_{2n_2}^{2}(l_2Д_2)^{2n_2}\overline{u}_i^{x_2x_3}=L_2^{-1}(\overline{u}_i^{x_2x_3}); \qquad (30)$$

$$u_i=\sum_{n_3=0}^{\infty}\beta_{2n_3}^{3}(l_3Д_3)^{2n_3}\overline{u}_i^{x_3}=L_3^{-1}(\overline{u}_i^{x_3}). \qquad (31)$$

Отсюда получим

$$u_i=L_3^{-1}(L_2^{-1}(L_1^{-1}(L_\tau^{-1}(\overline{u}_i))))=$$

$$=\sum_{n_0=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_3=0}^{\infty}\beta_{2n_0}^{0}\beta_{2n_1}^{1}\beta_{2n_2}^{2}\beta_{2n_3}^{3}\times$$

$$\times\left[(\tau Д_\tau)^{2n_0}(l_1Д_1)^{2n_1}(l_2Д_2)^{2n_2}\times(l_3Д_3)^{2n_3}\right]\overline{u}_i, \qquad (32)$$

где $\beta_{2n_j}^{j}=\sum_{m=0}^{n_j-1}\frac{1}{(2(n_j-m)+1)}\beta_{2m}^{j}$, $j=0,1,2,3;\ n_0=n$.

Подставив (32) в формулы для турбулентного напряжения (12), получим искомое выражение (7).

Следовательно, если $l_i = \text{const}$ или, во всяком случае, $l_i = l_i(Z)$ (известные эмпирические параметры), то система уравнений для осредненных гидродинамических моделей (6) формально замыкается выражением для турбулентных напряжений (7).

Далее пусть $l_i = l_i(\tau, x)$ и гидродинамические поля и масштабы осреднения таковы, что приближенно выполняются соотношения:

$$\frac{\overline{\partial f}}{\partial x_k}\approx\frac{\partial\overline{f}}{\partial x_k};\ \frac{\overline{\partial f}}{\partial\tau}\approx\frac{\partial\overline{f}}{\partial\tau},$$

тогда выражение (7) остается в силе.

В первом случае l_i имеют смысл масштабов осреднения гидродинамических полей. При решении конкретных задач методом конечных разностей величины l_i должны быть пропорциональны шагу по времени и пространственным координатам. В экспериментах они представляют собой осреднения с выбранным масштабом или должны быть пропорциональны «естественному» масштабу осреднения измерительной аппаратуры. Если $l_i = l_i(\tau, x)$, то l_i означает пройденный путь. В этом случае l_i представляет собой параметры исследуемого явления, с помощью которых можно «настраивать» гидродинамическую модель под исследуемое явление.

Если G – область определения искомых функций и $V \subset G$, то тензор напряжений $\xi_{x_ix_j}$ вырождается на границе. Поэтому для решения конкретных задач требуется столько краевых (граничных) условий, сколько их необходимо при постановке задачи с использованием уравнений Навье-Стокса.

При постановке начальной задачи возможно задание двух вариантов начальных условий:

1. При исследовании начальной стадии турбулентного процесса ($\tau = 0$) следует напряжение Рейнольдса принять равным нулю.

2. При развитом турбулентном движении среды $l_0 = \tau \neq 0$, поэтому в начальный момент времени кроме задания полей $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{T}$ необходимо задавать поля $\xi_{x_i x_j}$ и $\xi_{x_i T}$.

Выделим в выражении (10) члены с первыми и вторыми производными:

$$\xi_{x_i x_j} \approx -\frac{1}{3} l_k^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}\right) - \frac{1}{45} l_k^4 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_k^2}\right) -$$

$$-\frac{1}{36} l_{k_1}^2 l_{k_2}^2 \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2}} \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2}},\ k_1 \neq k_2. \qquad (33)$$

Если осреднять искомые функции только по координате $x_3(\tau = l_1 = l_2 = 0)$ и согласно теории Прандтля о пути смещения [1] положить $u_3' \sim u_1'$, то для плоскопараллельного потока турбулентного движения напряжение $\xi_{x_1 x_3}$ примет вид

$$\xi_{x_1 x_3} = \frac{1}{3} l_3^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3}\right)^2 \left[1 + \frac{1}{15} l_3^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_3^2}\right)^2 / \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3}\right)^2\right]. \qquad (34)$$

Если $1 + \frac{1}{15} l_3^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_3^2}\right)^2 / \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3}\right)^2 << 1, \qquad (35)$

то выражение (29) совпадает с формулой Прандтля для турбулентных напряжений Рейнольдса. Если следуя Карману [2], положить

$$l_3 = \chi \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} / \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_3^2}, \qquad (36)$$

то получим

$$\tau_{x_1 x_3} = \frac{1}{3} \chi^2 \left(1 + \frac{\chi^2}{15}\right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3}\right)^4 / \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_3^2}\right)^2, \qquad (37)$$

где χ – постоянная Кармана.

Выражение (32) по форме совпадает с полуэмпирической формулой Кармана.

Таким образом, получено осреднение исходной системы уравнений гидродинамики для расчета движения рабочих сред в аппаратах и трубопроводах холодильных систем в предположении, что все гидродинамические характеристики являются регулярными функциями координат и времени, и показано замыкание осредненной системы уравнений [3].

Список литературы

1. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидродинамика. Т.2. – М.: Гостехиздат, 1968.
2. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидродинамика.– М.: Физматгиз. 1965.
3. *Холодильные* установки / И.Г.Чумак, В.П.Чепуриенко и др.; Под ред. И.Г. Чумака – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Агропромиздат, 1991.