УДК 653.093

Полуэмпирическая модель расчета потребляемой мощности в резервуарах при перемешивании продуктов в турбулентном режиме

Канд. техн. наук **Б.Л. НИКОЛАЕВ**
СПбГУНиПТ

On the basis of experimental data and semi-empirical theory of turbulent transfer, the author suggests a mathematical model, allowing to calculate the power consumed for agitating in reservoirs with agitating devices.

В процессе производства кефир, ряженка, простокваша, сметана, животные жиры, майонез и другие вязкие пищевые продукты подвергаются охлаждению при перемешивании. В связи с этим актуальным вопросом является затрата энергии на перемешивание продукта.

Возможны различные режимы движения вязких пищевых продуктов в резервуарах при охлаждении, в том числе и турбулентный режим. Поэтому математическая модель, позволяющая рассчитать затраты мощности при турбулентном режиме, имеет значительную практическую ценность.

Ряд авторов получили теоретические формулы для расчета мощности при ламинарном режиме [1 – 3, 6 – 9]. Однако ввиду сложного характера движения при турбулентном режиме теоретически вывести формулу мощности для него невозможно.

Известна полуэмпирическая формула для турбулентного режима, предложенная в [1]. Недостатком данной формулы является то, что при расчете гидравлического сопротивления установленных под углом к радиусу скребков предлагается рассматривать их как плоские пластины, размеры которых равны проекции фактических размеров на меридиональную плоскость. Такое допущение трудно считать корректным: очевидно, что более узкая лопасть, установленная к радиусу под меньшим углом, будет иметь больший коэффициент лобового сопротивления, чем более широкая лопасть, установленная под большим углом, при условии равенства проекции их площадей на радиус.

В данной работе указанный выше недостаток устранен. Предлагаемая автором полуэмпирическая модель для расчета мощности основана на коэффициенте лобового сопротивления скребка.

Примем в первом приближении, что линейная скорость скребка относительно стенок резервуара много больше линейной скорости движения продукта относительно стенок резервуара. Тогда средняя скорость обтекания скребка продуктом равна линейной скорости движения скребка:

$$u = 2\pi nD/2 = \pi nD, \tag{1}$$

где u – средняя скорость обтекания скребка жидкостью, м/с;
n – частота вращения лопасти мешалки, $с^{-1}$;
D – диаметр резервуара, м.

Проекция площади скребка на радиус

$$S_R = Lb\cos(\beta), \tag{2}$$

где S_R – проекция площади скребка на радиус, $м^2$;
L – длина скребка, м;
b – ширина скребка, м;
β – угол между скребком и радиусом, град.

Проекцию давления на нормаль к радиусу вычислим по формуле

$$p = \xi_л \rho u^2/2, \tag{3}$$

где p – проекция давления на нормаль к радиусу, Па;
$\xi_л$ – коэффициент лобового сопротивления, отнесенный к проекции скребка на радиус;
ρ – плотность перемешиваемого продукта, $кг/м^3$.

В формуле (3) наибольшую сложность представляет определение коэффициента лобового сопротивления $\xi_л$. Ранее при изучении этой проблемы [1, 3, 9] не уделялось должного внимания выявлению зависимости $\xi_л$ от геометрических и гидромеханических параметров. В данной же работе была предпринята попытка установить эту зависимость.

Априорно можно предположить, что $\xi_л$ зависит от трех величин: кинематической вязкости ν, ширины скребка b и угла между скребком и радиусом β. Автором были проведены сотни опытов на модельных средах и реальных продуктах, и в результате обработки опытных данных была получена следующая зависимость:

$$\xi_л = 21145\,\nu^{0.957}\,[(2{,}457b + 0{,}378)/(1{,}138b^{1{,}15} + 0{,}125)]\cdot\{[0{,}457(90 - \beta)^{0{,}356} + 0{,}561]/16{,}34 + 0{,}31\cos(\beta) + 0{,}137\,(90 - \beta)^{0{,}208}\}, \tag{4}$$

где ν – кинематическая вязкость продукта, $м^2/с$.

Погрешность формулы (4) не превышает ±5 %.

Подставив (4) в (3), определяем p, после чего можно рассчитать силу давления продукта на лопасть в проекции на нормаль к радиусу:

$$F = pS_R = \xi_л \rho (u^2/2) Lb\cos(\beta), \tag{5}$$

где F – сила, Н.

Момент от силы F равен:

$$M = FD/2 = \xi_л \rho (u^2/4) Lb\cos(\beta)\ D, \tag{6}$$

где M – момент, Н·м.

Далее рассчитываем мощность, затрачиваемую на преодоление сопротивления трения продукта о скребок:

$$N_1 = 2\pi n Mz = \pi nz\, \xi_л \rho (\nu^2/2) Lb\cos(\beta)\ D, \tag{7}$$

где N_1 – мощность, затрачиваемая на преодоление трения о продукт, Вт;
z – число скребков.

Входящая в зависимость (4) кинематическая вязкость ν рассчитывается по общеизвестной формуле

$$\nu = \mu/\rho, \tag{8}$$

где μ – динамическая вязкость, Па·с.

Большинство вязких пищевых продуктов представляют собой неньютоновские жидкости. Поэтому их динамическая вязкость μ зависит от градиента скорости и определяется по формуле

$$\mu = k\,(\dot{\gamma})^{m-1}, \tag{9}$$

где k – коэффициент Оствальда;
$\dot{\gamma}$ – градиент скорости, $с^{-1}$;
m – показатель неньютоновского поведения.

Для определения градиента скорости $\dot{\gamma}$ используем методику, разработанную автором на основании полуэмпирической теории турбулентного переноса [5].

В работе [10] на основании гипотезы о вязком затухании турбулентных пульсаций у твердой стенки приводится следующее уравнение:

$$\delta/\nu = \{1 + [1 + 0{,}64\eta^2[1 - \exp(-\eta/26)]^2]^{0{,}5}\}/2 + 1, \tag{10}$$

где δ – коэффициент турбулентного обмена, $м^2/с$;
η – безразмерное расстояние от стенки.

Безразмерное расстояние от стенки η вычисляется по формуле

$$\eta = u_* y/\nu, \tag{11}$$

где u_* – динамическая скорость, м/с;
y – расстояние от стенки в направлении радиуса кривизны поверхности, м.

Максимальное безразмерное расстояние от стенки определяется по формуле

$$\eta_м = u_* y_м/\nu_м, \tag{12}$$

где $\eta_м$ – максимальное безразмерное расстояние от стенки;
$y_м$ – расстояние от стенки до точки с наименьшей или наибольшей (в зависимости от направления теплового потока) температурой жидкости, м.

И.В. Доманский и В.Н. Соколов, разработав полуэмпирическую теорию турбулентного переноса, в работе [4] приводят следующие формулы:

$$\frac{\alpha}{\lambda}\frac{\nu}{\chi\sqrt[4]{\dfrac{\nu N\cdot 4}{\rho\pi D^2 H}}} = \frac{\mathrm{Pr}}{\overline{\psi}}, \tag{13}$$

где α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м^2·К);
λ – коэффициент теплопроводности перемешиваемого продукта, Вт/(м·К);
H – высота резервуара, м;
$\mathrm{Pr} = c\cdot\mu/\lambda$ – критерий Прандтля;
c – удельная теплоемкость продукта, Дж/(кг·К);
χ– коэффициент;
$\overline{\psi}$ – безразмерная разность температур.

Безразмерная разность температур $\overline{\psi}$ вычисляется по формуле

$$\overline{\psi} = \frac{\displaystyle\int_0^{\eta_м}\int_0^{\eta}\frac{d\eta}{\dfrac{1}{\mathrm{Pr}}+\dfrac{\delta}{\nu}}}{\eta_м}. \tag{14}$$

При увеличении η подынтегральная функция в формуле (14) стремится к нулю. Расчеты, проведенные автором при помощи компьютера, показали, что вычисляемое по формуле (14) значение $\overline{\psi}$ довольно слабо зависит от $\eta_м$. Поэтому можно допустить, что $\overline{\psi}$ является функцией только одного аргумента – критерия Прандтля. Обработка результатов расчетов привела к следующей зависимости:

$$\overline{\psi} = 11\ \mathrm{Pr}^{0{,}73}. \tag{15}$$

В диапазоне $100 \le \mathrm{Pr} \le 10^6$ максимальная относительная погрешность формулы (15) не превышает 5 %. Таким образом, наиболее сложная и трудоемкая работа – вычисление двойного интеграла – свелась к одной формуле.

И.В. Доманский и В.Н. Соколов в работе [4] приводят уравнение

$$E_0 = \mu\dot{\gamma}^2, \tag{16}$$

где E_0 – диссипация энергии у твердой стенки, Вт/м^3.

В этой же работе приводится формула

$$E_0 = \chi^4\overline{E}, \tag{17}$$

где $\overline{E}$ – средняя по объему диссипация энергии, Вт/м^3.

Из работы [4] известно, что

$$\overline{E} = 4N/(\pi D^2 H). \tag{18}$$

Приравняв правые части уравнений (16) и (17), получим

$$\mu\dot{\gamma}^2 = \chi^4\overline{E}. \tag{19}$$

Подставив в (19) уравнения (9) и (18), имеем

$$k\cdot(\dot{\gamma})^{m-1}\dot{\gamma}^2 = \chi^4\ (4N)/(\pi D^2 H)\ . \tag{20}$$

Решаем уравнение (20) относительно $\dot{\gamma}$:

$$\dot{\gamma} = [4N\chi^4/(\pi DHk)]^{1/(m+1)}. \tag{21}$$

Из формулы (21)

$$\chi = [(\pi D^2 Hk\,\dot{\gamma}^{m+1})/(4N)]^{0{,}25}. \tag{22}$$

Подставим в уравнение (13) уравнения (22), (8) и (9), в результате серии последовательных преобразований получим

$$\frac{\alpha k^{0{,}5}\dot{\gamma}^{(0{,}5m-1)}}{\lambda\rho^{0{,}5}} = \frac{\mathrm{Pr}}{\overline{\psi}}. \tag{23}$$

С учетом уравнения (15) получим

$$\frac{\alpha k^{0{,}5}\dot{\gamma}^{(0{,}5m-1)}}{\lambda\rho^{0{,}5}} = \frac{\mathrm{Pr}}{11\mathrm{Pr}^{0{,}73}}. \tag{24}$$

Подставим в формулу (24) значение критерия Прандтля и решим полученное уравнение относительно $\dot{\gamma}$:

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{c^{0,27}\lambda^{0,73}\rho^{0,5}}{11\alpha k^{0,23}} \right)^{\frac{1}{0,23m-0,73}}. \quad (25)$$

Общеизвестна теоретическая формула для определения коэффициента теплоотдачи α резервуара со скребковым перемешивающим устройством:

$$\alpha = (2/\sqrt{\pi})(c\rho\lambda nz)^{0,5}. \quad (26)$$

Тогда из (25) получим

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{\lambda^{0,23}}{12,4c^{0,23}n^{0,5}z^{0,5}k^{0,23}} \right)^{\frac{1}{0,23\cdot m-0,73}}. \quad (27)$$

Теперь, зная $\dot{\gamma}$, имеем все необходимые данные для расчета $\xi_л$ по формуле (4) и, следовательно, для расчета N_1 по формуле (7).

Далее необходимо определить мощность, расходуемую на трение скребка о стенку цилиндра резервуара. С довольно большой степенью точности можно допустить, что сила F приложена в центре скребка. Тогда уравнение равенства моментов относительно оси вращения скребка запишется следующим образом:

$$Fb/2 = F_{оп}\, b \sin(\beta), \quad (28)$$

где $F_{оп}$ – реакция стенки цилиндра резервуара, Н.

Общеизвестно, что

$$F_{тр} = k_{тр}\, F_{оп}, \quad (29)$$

где $F_{тр}$ – сила трения, Н;
$k_{тр}$ – коэффициент трения.

Тогда из (28), сократив b, имеем

$$F/2 = F_{тр}/k_{тр} \sin(\beta), \quad (30)$$

откуда

$$F_{тр} = (F/2)[k_{тр}/\sin(\beta)]. \quad (31)$$

Подставив (5) в (31), получим

$$F_{тр} = \xi_л\rho(u^2/4)Lb\cos(\beta)\ [k_{тр}/\sin(\beta)]. \quad (32)$$

Момент от силы $F_{тр}$ равен:

$$M_2 = F_{тр}\, D/2 = \xi_л\rho(u^2/8)Lb\cos(\beta)\ [k_{тр}/\sin(\beta)]\ D. \quad (33)$$

Тогда мощность, расходуемая на преодоление трения скребка о поверхность цилиндра резервуара, будет равна:

$$N_2 = 2\pi nzM_2 = \pi nz\xi_л\rho(u^2/4)Lb\cos(\beta)\ [k_{тр}/\sin(\beta)]\ D, \quad (34)$$

где N_2 – мощность, расходуемая на трение скребка о стенку, Вт.

Суммарная мощность (Вт), расходуемая на перемешивание, представляет из собой сумму N_1 и N_2:

$$N = N_1 + N_2, \quad (35)$$

Подставим в формулу (35) уравнения (7) и (34) и вынесем за скобки общие множители:

$$N_2 = \pi nz\xi_л\rho(u^2/2)Lb\cos(\beta)D + \pi nz\xi_л\rho(u^2/4)Lb\cos(\beta)\times$$
$$\times[k_{тр}/\sin(\beta)]\ D = \pi nz\xi_л\rho(u^2/2)Lb\cos(\beta)D\times$$
$$\times[1 + 0,5k_{тр}/\sin(\beta)]. \quad (36)$$

Подставив в (36) формулу (1), получим

$$N = \pi nz\xi_л\rho[(\pi nD)^2/2]Lb\cos(\beta)D\ [1 + 0,5\ k_{тр}/\sin(\beta)] =$$
$$= 0,5\pi^3n^3z\xi_л\rho Lb\cos(\beta)D^3\ [1 + 0,5k_{тр}/\sin(\beta)]. \quad (37)$$

Градиент скорости $\dot{\gamma}$ рассчитан по формуле (27) для теоретического резервуара со скребковыми перемешивающими устройствами. В реальном резервуаре коэффициент теплоотдачи может отличаться от рассчитываемого по формуле (26), следовательно, и значение градиента скорости может быть несколько иным. Для определения истинного значения градиента скорости объединим полуэмпирическую теорию турбулентного переноса с полученной автором полуэмпирической формулой (4).

Распишем формулу (37) с учетом формул (4) и (9). В результате окончательно получим

$$N = 0,5\pi^3n^3z\rho Lb\cos(\beta)D^3\ [1 + 0,5k_{тр}/\sin(\beta)]\times$$
$$\times 21145\cdot[k\ (\dot{\gamma})^{m-1}/\rho]^{0,957}[(2,457b + 0,378)/$$
$$(1,138b^{1,15} + 0,125)]\cdot \{[0,457\ (90 - \beta)^{0,356} + 0,561]/$$
$$[16,34 + 0,31\cos(\beta) + 0,137\ (90 - \beta)^{0,208}]\}. \quad (38)$$

Список литературы

1. *Бегачев В.И., Гурвич А.Р., Брагинский Л.Н.* Обобщенный метод расчета мощности при перемешивании высоковязких ньютоновских и неньютоновских сред // Теоретические основы химической технологии. 1980. Т. 14, № 1.
2. *Глуз М.Д., Павлушенко И.С.* Затраты мощности на перемешивание неньютоновских жидкостей // ЖПХ. 1967. Т. 40, № 7.
3. *Глуз М.Д., Павлушенко И.С.* О мощности, затрачиваемой на перемешивание скребковыми мешалками // Теоретические основы химической технологии. 1969. Т. 3, № 5.
4. *Доманский И.В., Соколов В.М.* Обобщение различных случаев конвективного теплообмена с помощью полуэмпирической теории турбулентного переноса // Теоретические основы химической технологии. 1968. Т. 2, № 5.
5. *Николаев Б.Л.* Полуэмпирическая методика определения коэффициента теплоотдачи и градиента скорости в аппаратах со скребковыми перемешивающими устройствами // Теоретические, экспериментальные исследования процессов, машин, агрегатов, автоматизаций, управления и экономики пищевой технологии: Межвуз. сб. науч. тр. – СПб.: СПбТИХП, 1994.
6. *Регер Э.О., Лацер И.* О расходе энергии, теплообмене и времени пребывания в реакторах со скребковыми мешалками в области ламинарного течения // Теоретические основы химической технологии. 1981. Т. 15, № 1.
7. *Розанов Л.С., Ластовцев А.М.* Мощность мешалки со скребками при работе в высоковязких ньютоновских жидкостях // Химическое и нефтяное машиностроение. 1969. № 4.
8. *Фройштетер Г.Б., Скурчинский В.А., Кравченко В.Р., Мамченко С.Д.* Исследование закономерностей ламинарного течения и затрат мощности в скребковых аппаратах // ЖПХ. 1978. Т. 51, вып. 1.
9. *Фройштетер Г.Б., Скурчинский В.А., Мамченко С.Д., Кравченко В.Р.* Распределение окружной скорости и затраты мощности при перемешивании скребковых аппаратов // Труды 3-й Всесоюзной конференции по теории и практике перемешивания в жидких средах. – М., 1976.
10. *Vermeulen T., Williams G., Langlois G.* Interfacial area in liquid-liquid and gas-liquid agitation // Chem. Eng. Crogr. – 1955, V. 51.