

Определение градиента скорости сдвига продукта в емкостном оборудовании на основании полуэмпирической теории турбулентного переноса

Канд. техн. наук Б.Л. НИКОЛАЕВ
СПбГУНиПТ

On the basis of the half-empirical theory of turbulent carry the author offers the mathematical model, allowing to count the velocity gradient of shear in tanks with mixing devices.

При обработке вязких структурированных продуктов в емкостном оборудовании главным фактором, влияющим на разрушение их структуры, является градиент скорости сдвига продукта. В ряде работ предлагаются различные зависимости для определения градиента скорости [1 – 3, 7]. Однако теоретические обоснования приводимых формул либо отсутствуют, либо содержат большое количество весьма спорных допущений.

Если мощность, расходуемую на перемешивание, и коэффициент теплоотдачи в имеющемся оборудовании или его модели можно определить опытным путем [7], то непосредственно измерить градиент скорости не представляется возможным. Поэтому он может быть только рассчитан.

В данной работе автор на основании полуэмпирической теории турбулентного переноса предлагает научно обоснованную методику расчета градиента скорости сдвига продукта γ в емкостных аппаратах со скребковыми перемешивающими устройствами.

подавляющее большинство пищевых продуктов представляют собой неньютоновские среды. Для таких сред существует общеизвестная формула

$$\mu_{\text{эф}} = k\gamma^{m-1}, \quad (1)$$

где $\mu_{\text{эф}}$ – эффективная вязкость, Па·с;
 k – коэффициент Оствальда, Па·с;
 m – показатель неньютоновского поведения.

И.В. Доманский и В.Н. Соколов в работе [4] приводят уравнение

$$E_0 = \mu_{\text{эф}}\gamma^2, \quad (2)$$

где E_0 – диссипация энергии у твердой стенки, Вт/м³.

В этой же работе приводится формула

$$E_0 = \chi^4 \bar{E}, \quad (3)$$

где χ – безразмерный коэффициент;

\bar{E} – средняя по объему жидкости диссипация энергии, Вт/м³.

Физический смысл коэффициента χ авторами не раскрывается.

Из работы [4] известно, что

$$\bar{E} = \frac{N}{V} = \frac{4N}{\pi D^2 H}, \quad (4)$$

где N – мощность, расходуемая на перемешивание, Вт;

V – объем резервуара, м³;

D – диаметр резервуара, м;

H – высота резервуара, м.

Из уравнений (2) – (4) получаем

$$\mu_{\text{эф}}\gamma^2 = \chi^4 \frac{4N}{\pi D^2 H}. \quad (5)$$

Последовательно преобразуя уравнение (5), имеем

$$\gamma^2 = \frac{4N\chi^4}{\pi D^2 H \mu_{\text{эф}}}; \quad (6)$$

$$\mu_{\text{эф}} = \frac{4N\chi^4}{\gamma^2 \pi D^2 H}. \quad (7)$$

Подставив в уравнение (7) формулу (1) и произведя серию последовательных преобразований, получим:

$$k\gamma^{m-1} = \frac{4N\chi^4}{\gamma^2 \pi D^2 H}; \quad (8)$$

$$\chi^4 = \frac{k\gamma^{m-1}\gamma^2 \pi D^2 H}{4N}; \quad (9)$$

$$\chi = \left(\frac{\pi D^2 H k \gamma^{m+1}}{4N} \right)^{0,25}; \quad (10)$$

$$\gamma^{m+1} = \frac{4N\chi^4}{\pi D^2 Hk}; \quad (11)$$

$$\gamma = \left(\frac{4N\chi^4}{\pi D^2 Hk} \right)^{\frac{1}{m+1}}. \quad (12)$$

И.В. Доманский и В.Н. Соколов в работе [4] приводят следующее уравнение:

$$\frac{\alpha}{\lambda} \frac{v}{\chi^4 \sqrt{\frac{v\bar{E}}{\rho}}} = \frac{Pr}{\bar{\psi}}, \quad (13)$$

где α – коэффициент теплоотдачи на стороне продукта, Вт/(м²·К);

λ – коэффициент теплопроводности продукта, Вт/(м·К);

v – коэффициент кинематической вязкости продукта, м²/с;

ρ – плотность продукта, кг/м³;

$Pr = c \mu_{эф}/\lambda$ – коэффициент Прандтля;

c – теплоемкость продукта, Дж/(кг·К);

$\bar{\psi}$ – средняя безразмерная разность температур.

Известно [7], что

$$v = \frac{\mu_{эф}}{\rho} = \frac{k\gamma^{m-1}}{\rho}. \quad (14)$$

Подставив в уравнение (13) уравнения (10) и (14) и внося χ под знак корня, получим

$$\frac{\alpha k \gamma^{m-1}}{\lambda \rho \left(\frac{\pi D^2 H k \gamma^{m+1}}{4N} \frac{k \gamma^{m-1} \bar{E}}{\rho^2} \right)^{0,25}} = \frac{Pr}{\bar{\psi}}. \quad (15)$$

Подставив в уравнение (15) формулу (4), будем иметь

$$\frac{\alpha k \gamma^{m-1}}{\lambda \rho \left(\frac{\pi D^2 H k \gamma^{m+1}}{4N} \frac{k \gamma^{m-1} 4N}{\rho^2 \pi D^2 H} \right)^{0,25}} = \frac{Pr}{\bar{\psi}}. \quad (16)$$

Проведем серию последовательных преобразований уравнения (16):

$$\frac{\alpha k \gamma^{m-1}}{\lambda \rho \left(\frac{k^2 \gamma^{2m}}{\rho^2} \right)^{0,25}} = \frac{Pr}{\bar{\psi}}; \quad (17)$$

$$\frac{\alpha k \gamma^{m-1}}{\lambda \rho \frac{k^{0,5} \gamma^{0,5m}}{\rho^{0,5}}} = \frac{Pr}{\bar{\psi}}; \quad (18)$$

$$\frac{\alpha k^{0,5} \gamma^{0,5m-1}}{\lambda \rho^{0,5}} = \frac{Pr}{\bar{\psi}}. \quad (19)$$

Подставив в уравнение (19) значение коэффициента Прандтля и произведя преобразования, получим:

$$\frac{\alpha k^{0,5} \gamma^{0,5m-1}}{\lambda \rho^{0,5}} = \frac{c \mu_{эф}}{\bar{\psi} \lambda}; \quad (20)$$

$$\frac{\alpha k^{0,5} \gamma^{0,5m-1}}{\rho^{0,5}} = \frac{c k \gamma^{m-1}}{\bar{\psi}}; \quad (21)$$

$$\frac{\alpha}{\rho^{0,5}} = \frac{c k^{0,5} \gamma^{0,5m}}{\bar{\psi}}; \quad (22)$$

$$\gamma = \left(\frac{\alpha \bar{\psi}}{c \rho^{0,5} k^{0,5}} \right)^{\frac{2}{m}}. \quad (23)$$

И.В. Доманский и В.Н. Соколов [4] на основании полуэмпирической теории турбулентного переноса предлагают формулу для расчета средней безразмерной разности температур $\bar{\psi}$:

$$\bar{\psi} = \frac{\int_0^{\eta_m} \int_0^{\eta_m} \frac{d\eta}{1 + \frac{\delta}{v}}}{\eta_m}, \quad (24)$$

где $\eta_m = u_* y_m / v$ – максимальное безразмерное расстояние от стенки;

u_* – динамическая скорость, м/с;

y_m – расстояние от стенки до точки с наименьшей или наибольшей (в зависимости от направления теплового потока) температурой жидкости, м;

δ – коэффициент турбулентного обмена, м²/с;

$\eta = u_* y / v$ – безразмерное расстояние от стенки;

y – расстояние от стенки в направлении радиуса кривизны поверхности, м.

В работе [8] на основе гипотезы о вязком затухании турбулентных пульсаций у твердой стенки приводится уравнение, единое для всех значений η :

$$\frac{\delta}{v} = \frac{1 + \left\{ 1 + 0,64 \eta^2 \left[1 - \exp\left(\frac{-\eta}{26} \right) \right]^2 \right\}^{0,5}}{2} - 1. \quad (25)$$

Для емкостного оборудования точка с наименьшей или наибольшей температурой продукта находится в центре резервуара. Поэтому

$$y_m = D/2. \quad (26)$$

Динамическую скорость определим по формуле

$$u_* = \omega(D/2) = \pi D n, \quad (27)$$

где ω – угловая скорость вращения мешалки, с^{-1} ;

n – частота вращения вала мешалки, с^{-1} .

С учетом формул (26), (27) и (14) распишем в явном виде формулу для определения η_m :

$$\eta_m = \{[\pi D n D/2]/\mu_{эф}\} \rho = [\pi D^2 n \rho]/(2k\gamma^{m-1}). \quad (28)$$

Подставив формулы (25) и (28) в уравнение (24) и расписав в явном виде критерий Прандтля, получим

$$\bar{\psi} = \frac{\int_0^{\frac{\pi D^2 n \rho}{2k\gamma^{m-1}}} \int_0^{\frac{\pi D^2 n \rho}{2k\gamma^{m-1}}} \frac{d\eta}{\lambda/(ck\gamma^{m-1}) + \{1 + [1 + 0,64\eta^2(1 - \exp(-\eta/26))^2]^{0,5}\} / 2 - 1}}{\pi D^2 n \rho / (2k\gamma^{m-1})}. \quad (29)$$

Подставив (29) в (23), окончательно получим

$$\gamma = \left(\alpha \int_0^{\frac{\pi D^2 n \rho}{2k\gamma^{m-1}}} \int_0^{\frac{\pi D^2 n \rho}{2k\gamma^{m-1}}} \frac{d\eta}{\lambda/(ck\gamma^{m-1}) + \{1 + [1 + 0,64\eta^2(1 - \exp(-\eta/26))^2]^{0,5}\} / 2 - 1} \right)^{\frac{2}{m-1}}. \quad (30)$$

В уравнении (30) все величины, кроме градиента скорости γ , известны. Таким образом, мы имеем одно уравнение с одним неизвестным. Входящий в уравнение (30) двойной интеграл в явном виде взять невозможно. Соответственно получить из уравнения (30) явную зависимость для расчета γ не представляется возможным. Поэтому уравнение (30) следует решать методом последовательных приближений. При современном уровне развития компьютерной техники это не представляет трудностей. Например, в среде MathCAD для решения уравнения (30) можно использовать стандартную процедуру *root*, дающую на выходе готовое значение γ .

Таким образом, нами была разработана методика, позволяющая рассчитывать градиент скорости сдвига продукта γ в емкостном оборудовании со скребковыми перемешивающими устройствами при следующих известных величинах: α , n , D , ρ , c , λ , k , m . Предложенный способ был получен на основе полуэмпирической теории турбулентного переноса посредством строгих математических преобразований, выполненных без каких-либо допущений и аппроксимаций. Поэтому погрешность при определении γ по формуле (30) будет определяться только тем, с какой точностью замерены входящие в нее величины α , n , D , ρ , c , λ , k , m .

В качестве примера рассмотрим, как использовать описанную выше методику определения градиента скорости сдвига в резервуаре с $D = 3$ м и количеством скребковых лопастей $z = 2$ при изменении n от 0 до

2 с^{-1} для пломбира шоколадного, реологические характеристики которого были исследованы нами ранее [5].

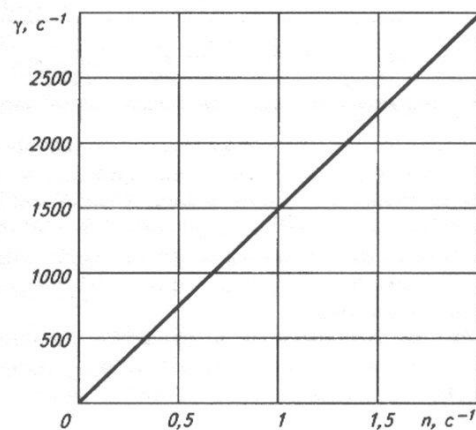
При температуре продукта 15°C пломбир имеет следующие реологические характеристики: $k = 0,253 \text{ Па}\cdot\text{с}$; $m = 0,787$.

Расчеты будем производить для запатентованной нами емкости с многоконтактным очищающим устройством [6]. Как показали проведенные нами эксперименты на модельных средах и реальных продуктах, для данной емкости коэффициент теплоотдачи α на стороне продукта составил 80 % от теоретического. Расхождение между теоретическим коэффициентом, умноженным на 0,8, и реальным не превышало 6 %, что находится в пределах погрешности измерений. Такое близкое совпадение значений теоретического и реального коэффициентов теплоотдачи можно объяснить тем, что в предложенной нами модели пристенные слои счищаются полностью, и благодаря конструкции мешалки происходит полное перемешивание счищенных слоев с основной массой продукта. То есть два основных фактора, уменьшающих реальный коэффициент теплоотдачи по отношению к теоретическому, в предложенном агрегате сведены к нулю.

Теоретический коэффициент теплоотдачи в емкостном оборудовании со скребковыми перемешивающими устройствами рассчитывается по известной формуле

$$\alpha = (2/\sqrt{\pi})(c\rho\lambda n z)^{0,5}. \quad (31)$$

Для получения реальных значений коэффициента теплоотдачи в емкости правую часть уравнения (31) нуж-



Зависимость градиента скорости γ от частоты вращения n

но умножить на 0,8. Таким образом, значения коэффициента теплоотдачи в [6] будут рассчитываться по формуле (32):

$$\alpha = 0,8(2/\sqrt{\pi})(c\rho\lambda n z)^{0,5}. \quad (32)$$

Значения α , рассчитанные по формуле (32), и будут подставляться в уравнение (30).

На рисунке представлена зависимость (30) градиента скорости сдвига продукта от частоты вращения мешалки.

Как видно из рисунка, предлагаемая методика расчета градиента скорости сдвига достаточно точно отражает реальное положение вещей.

Список литературы

1. Барановский Н.В., Коваленко Л.М., Ястребенецкий А.Р. Пластинчатые и спиральные теплообменники. – М.: Машиностроение, 1973.
2. Бегачев В.И., Брагинский Л.Н., Глухов В.П. и др. О моделировании полимеризаторов со скребками // Тепло- и массообмен в неньютоновских жидкостях. – М.: Энергия, 1969.
3. Глуз М.Д., Павлушенко И.С. О мощности, затрачиваемой на перемешивание скребковыми мешалками // Теоретические основы химической технологии. 1969. Т. 3. № 5.
4. Доманский И.В., Соколов В.Н. Обобщение различных случаев конвективного теплообмена с помощью полуэмпирической теории турбулентного переноса // Теоретические основы химической технологии. 1968. Т. 2. № 5.
5. Николаев Б.Л. Математическая обработка реологических характеристик смесей мороженого // Материалы II Междунар. науч.-техн. конф. «Прогрессивные технологии и оборудование для пищевой промышленности». – Воронеж, 2004. Ч.2.
6. Патент № 2002129724/20. Емкость с многоконтактным очищающим устройством / Б.Л.Николаев. Оpubл. 20.06.2003, Бюл. ФИПС № 17.
7. Стренк Ф. Перемешивание и аппараты с мешалками. – Л.: Химия, 1975.
8. Vermeulen T., Williams G., Lang Lois G. Interfacial area in liquid-liquid and gas-liquid agitation // Chem. Eng. Progress. 1955. V. 51.