

# Математическое моделирование процесса маслоотделения с использованием центробежных сил

Канд. техн. наук А.В.ГУЩИН  
ГУ КНИИХП

*The problem of oil trapping on the low pressure side of ammonia refrigerating machines has not been solved yet. For this purpose an oil separator is offered using centrifugal forces for the separation of a two-phase liquid flow. The model of the process of oil separation is described. According to the results of the carried out theoretical investigations the design of the oil separator has been developed, the operation of which confirmed its high efficiency and reliability.*

Одним из направлений повышения экономичности и безопасности аммиачных холодильных установок (АХУ) является создание условий и средств, предотвращающих попадание масла в испаритель, сосуды и аппараты.

Если для стороны высокого давления АХУ существует множество конструкций маслоотделителей, то для стороны низкого давления их практически нет. Изыскание высокоэффективных способов улавливания масла на стороне низкого давления АХУ представляет большой практический интерес. Одним из перспективных направлений следует считать процесс маслоотделения с использованием центробежных сил.

С целью установления основных параметров АХУ, работающей в различных режимах, влияющих на степень очистки хладагента от масла в маслоотделителе с использованием центробежных сил, выполнено математическое моделирование на базе экспериментальных исследований в условиях, приближенных к действительным.

Планирование эксперимента осуществлялось на основе математической статистики с учетом режимных факторов, влияющих на процесс маслоотделения. Для этой цели был поставлен полный четырехфакторный эксперимент.

Концентрация масла на выходе из маслоотделителя зависит от многих параметров:

$$k_2 = k_1 (t_1, v_2, v_4, k_1, \rho_m, \rho_{am}, a, D_1, L, \gamma_m, \gamma_{amm}), \quad (1)$$

где  $k_1$  — начальная концентрация масла, %;

$t_1$  — температура смеси аммиака с маслом, °C;

$v_2$  — скорость потока в кольцевом зазоре маслоотделителя, м/с;

$v_4$  — скорость потока после изменения движения на 180°, м/с;

$\rho_m$  — плотность масла, кг/м³;

$\rho_{am}$  — плотность жидкого аммиака, кг/м³;  
 $a$  — толщина кольцевого зазора, м (рис. 1);  
 $D_1$  — внутренний диаметр кольцевого зазора (при движении жидкости после поворота на 180°), м;  
 $L$  — высота кольцевого зазора, м;  
 $\gamma_m$  — кинематическая вязкость масла, м²/с;  
 $\gamma_{amm}$  — кинематическая вязкость жидкого аммиака, м²/с.

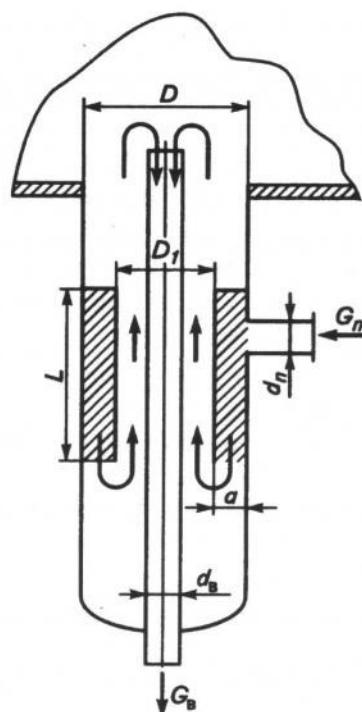


Рис. 1. Принципиальная схема маслоотделителя:  
 $D$  — наружный диаметр маслоотделителя;  
 $D_1$  — внутренний диаметр маслоотделителя;  
 $a$  — кольцевой зазор;  $L$  — высота кольцевого зазора;  
 $d_s$  — диаметр выходной трубы;  $G_n$  — объемный расход жидкой эмульсии;  $d_b$  — диаметр входного патрубка;  
 $G_b$  — расход очищенного продукта

Коэффициент эффективности маслоотделения (%) в аппаратах определяется по формуле

$$\xi = \frac{k_1 - k_2}{k_1} \cdot 100. \quad (2)$$

Размер кольцевого зазора равен

$$a = \frac{D - D_1}{2}, \quad (3)$$

где  $D$  – наружный диаметр маслоотделителя, м (см. рис. 1).

Скорости потоков  $v_2$  и  $v_4$  можно представить в следующем виде:

$$v_2 = \frac{G_{\Pi}}{\pi a D_1}, \quad v_4 = \frac{4G_{\Pi}}{\pi(D_1^2 - d_B^2)}, \quad (4)$$

где  $G_{\Pi}$  – объемный расход жидкой эмульсии, м<sup>3</sup>/с;  $d_B$  – диаметр выходной трубы, м.

Рассмотрим течение вязкой жидкой смеси в канале с поворотом после кольцевого зазора на 180°, с характерным линейным масштабом течения  $h$ . Поскольку частицы жидкости «прилипают» к стенкам, то скорость слоев смеси будет различной. Если известна характерная скорость течения (например, скорость  $v$  на оси  $x$  потока), то легко оценить силы вязкого трения:

$$f_x = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \mu \frac{v}{h^2}, \quad (5)$$

где  $y$  – направление нормали к потоку;

$\mu = \gamma p$  – динамическая вязкость, Н·с/м<sup>2</sup>;

$\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>.

Отсюда следует, что силы вязкого трения убывают с увеличением линейного масштаба. В общем случае можно считать, что силы вязкости, возникающие в потоке, обратно пропорциональны квадрату характерного поперечного размера потока и пропорциональны скорости. Ясно, что силы вязкости препятствуют маслоотделению.

В гидродинамике очень часто используют понятие силы инерции  $F_x = -\rho \frac{dv}{dt}$ . С точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с частицей жидкости, она находится в покое, потому что силы давления, вязкости и инерции уравновешивают друг друга. В частном случае течения жидкости в канале при искривлении трубок тока жидкости силы инерции можно выразить следующей зависимостью:

$$F_x = -\rho \frac{dv}{dt} \sim -\rho \frac{v^2}{h}, \quad (6)$$

где  $v^2/h$  – характерное центростремительное ускорение.

В общем случае силы инерции обратно пропор-

циональны характерному поперечному размеру потока и пропорциональны квадрату скорости.

При течении вязкой жидкой смеси в канале (с поворотом после кольцевого зазора на 180°) силы инерции увеличивают маслоотделение.

С учетом (5) и (6) соотношение сил инерции и сил вязкости можно оценить следующим образом:

$$\frac{f_x}{F_x} = \frac{\mu \frac{v}{h^2}}{\rho \frac{v^2}{h}} = \frac{\mu}{\rho v h} = \frac{1}{Re}. \quad (7)$$

Здесь  $Re = \frac{\rho v h}{\mu}$  – число Рейнольдса. Таким образом, число Рейнольдса непосредственно влияет на коэффициент эффективности маслоотделения.

При не очень высоких скоростях течения силы вязкости «гасят» составляющие скорости жидкости, поперечные потоку, препятствуя тем самым увеличению маслоотделения. При ламинарном течении силы вязкости слаживают боковые перемещения жидкости, возникающие вследствие различных неровностей стенок канала. В области ламинарного течения линии тока практически параллельны. Поле скоростей является потенциальным (по аналогии с однородным полем силы тяжести). Инерция жидкости стремится сохранить боковые перемещения жидкости, способствуя тем самым турбулентности. Переход от ламинарного к турбулентному течению происходит при некотором числе Рейнольдса, получившем название критического. Его значение сильно зависит от формы входной части канала. В случае закругленного входа ламинарное течение устанавливается с самого начала и продолжает оставаться таким до больших чисел Рейнольдса ( $Re_{kp} = 20\ 000$ ) при незакругленном входе  $Re_{kp} = 1200$ . Поэтому в литературе приводятся весьма различные значения  $Re_{kp}$ . Экспериментально полученные значения  $Re$  в маслоотделителе не превышают 100, и течение в канале можно считать ламинарным.

Через варьируемые размерные величины (1) безразмерный критериальный комплекс числа Рейнольдса можно выразить следующим образом:

$$Re = \frac{v_2 D_1}{\gamma}. \quad (8)$$

С учетом уравнений (7) и (8) число Рейнольдса можно представить следующим выражением:

$$Re = \frac{G_{\Pi}}{\pi a \gamma}. \quad (9)$$

Для получения безразмерной критериальной зависимости эффективности  $\xi$  маслоотделения

(2) от числа  $Re$  (9) использовалась регрессионная модель

$$\xi = c \cdot Re^n, \quad (10)$$

где  $c$  – параметр, отражающий влияние начальной концентрации масла, температуры жидкости, скорости потоков, конструктивных размеров аппарата;

$n$  – показатель степени.

При проведении нелинейного регрессионного анализа исследователя интересует, связана ли и если да, то как, зависимая переменная и набор независимых переменных. В выражении (10) зависимая переменная отклика  $\xi$  является функцией от независимой переменной  $Re$ .

В стандартной множественной регрессии ее параметры находят "подбором", минимизируя дисперсию остатков (сумму квадратов остатков). Любые отклонения наблюдаемых величин от предсказанных означают некоторые потери в точности предсказаний, например, из-за случайного шума (ошибок). Поэтому можно сказать, что цель метода наименьших квадратов заключается в минимизации функции потерь. В этом случае функция потерь определяется как сумма квадратов отклонений от предсказанных значений. Когда эта функция достигает минимума, получают оценки для параметров (свободного члена, коэффициентов регрессии). Полученные оценки называются оценками по методу наименьших квадратов.

Покажем, как находить минимумы функций потерь (т.е. наборы параметров, наилучшим образом соответствующие оцениваемой модели), как вычислять стандартные ошибки оценивания параметров и как после оценивания регрессионных параметров проводить проверку пригодности модели в целом.

Степенную форму регрессионной модели (10) можно привести к линейной, если рассмотреть логарифмы уровней по какому-нибудь (но одному и тому же) основанию (например, натуральные или десятичные логарифмы).

Действительно, переходя к логарифмам уровней, получаем соотношение

$$\ln \xi = n \ln Re + \ln c. \quad (11)$$

Если обозначить  $\ln c = k$ ,  $\ln \xi = y$ ,  $\ln Re = x$ , то соотношение примет вид

$$y = nx + k. \quad (12)$$

Заметим, что коэффициент  $n$  в последних выражениях можно представить:

$$n = \frac{d \ln \xi}{d \ln Re}. \quad (13)$$

Эта величина не зависит от основания логарифмов и является так называемой функцией эластичности  $n$ , определяемой как предел отношения

процентного изменения  $Y$  к процентному изменению  $X$ , когда последнее стремится к нулю:

$$\eta(X) = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\frac{f(X + \Delta X) - f(X)}{f(X)} \cdot 100}{\frac{\Delta X}{X} \cdot 100}. \quad (14)$$

Если  $\eta(X) \equiv n$ , то постоянную  $n$  можно трактовать как процентное изменение уровня фактора  $Y$  при изменении фактора  $X$  на 1 %.

Рассмотрим вопрос о том, каким образом можно (хотя бы приблизительно) восстановить гипотетическую линейную связь:

$$y_i = (\alpha + \beta x_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (15)$$

где  $N$  – число проведенных экспериментов между переменными, если таковая действительно существует.

Если  $\alpha$  и  $\beta$  – «истинные» значения параметров линейной модели связи, то ошибка в  $i$ -м наблюдении выражается зависимостью

$$\varepsilon_i = y_i - (\alpha + \beta x_i). \quad (16)$$

Однако даже при действительном существовании линейной связи параметры  $\alpha$  и  $\beta$  остаются неизвестными, и мы можем судить об их истинных значениях лишь приближенно, оценивая их значения на основании ограниченного количества имеющихся данных наблюдений (статистических таблиц).

Поиск подходящих оценок для  $\alpha$  и  $\beta$  можно осуществлять по принципу наименьших квадратов. Среди всех возможных значений  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$ , претендующих на роль оценок параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , следует выбирать такую пару  $\alpha^{**}$ ,  $\beta^{**}$ , для которой

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \alpha^{**} - \beta^{**} x_i)^2 = \min_{\alpha^*, \beta^*} \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha^* - \beta^* x_i)^2, \quad (17)$$

т.е. путем минимизации суммы квадратов

$$Q(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i)^2 \quad (18)$$

по всем возможным значениям  $\alpha$  и  $\beta$  при заданных (наблюдаемых) значениях  $x_1, \dots, x_n$ ,  $y_1, \dots, y_n$ . Функция двух переменных  $Q(\alpha, \beta)$  описывает поверхность  $z = Q(\alpha, \beta)$  в трехмерном пространстве с прямоугольной системой координат  $\alpha, \beta, z$ , т.е. задача сводится к поиску точки минимума функции двух переменных. Такая точка находится путем приравнивания нулю частных производных функции  $z = Q(\alpha, \beta)$ ,  $\partial Q(\alpha, \beta)/\partial \beta = 0$  (при фиксированном  $\beta$ ) и  $\partial Q(\alpha, \beta)/\partial \alpha = 0$  при фиксированном  $\alpha$ .

Это приводит к так называемой системе нормальных уравнений:

$$\partial Q(\alpha, \beta)/\partial \alpha = 0, \quad \partial Q(\alpha, \beta)/\partial \beta = 0. \quad (19)$$

Решением системы нормальных уравнений (19)

является искомая пара  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ . Остается заметить, что согласно правилам вычисления производных

$$\frac{\partial Q(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i)(-1); \quad (20)$$

$$\frac{\partial Q(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i)(-x_i). \quad (21)$$

Следовательно  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$  удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)x_i = 0. \quad (22)$$

Эти два уравнения можно записать также в виде системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} n\hat{\alpha} + \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \hat{\beta} = \sum_{i=1}^n y_i; \\ \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \hat{\alpha} + \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \hat{\beta} = \sum_{i=1}^n y_i x_i, \end{cases} \quad (23)$$

которая может быть легко решена, например, методом подстановки. Из первого уравнения системы находим

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \frac{1}{n} \hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}. \quad (24)$$

Подстановка полученного выражения для  $\hat{\alpha}$  во второе уравнение системы дает зависимость

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n y_i \right) \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \hat{\beta} + \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \hat{\beta} = \\ & = \sum_{i=1}^n y_i x_i, \end{aligned} \quad (25)$$

откуда

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n y_i \right) \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i x_i - n \bar{y} \bar{x}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}. \quad (26)$$

Заметим еще, что:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \\ & = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n y_i x_i - \\ & - \bar{y} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} \sum_{i=1}^n y_i + n \bar{y} \bar{x} = \sum_{i=1}^n y_i x_i - n \bar{y} \bar{x}. \end{aligned} \quad (28)$$

Последние соотношения позволяют получить более употребительную форму записи выражения для  $\hat{\beta}$  (в отклонениях от средних значений):

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (29)$$

Выражение (29) совместно с выражением (24) решает задачу отыскания оценок  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$  на основе принципа наименьших квадратов. Для любой точки  $(x_i, y_i)$  на диаграмме рассеяния можно записать:

$$y_i - \bar{y} = (y_i - \hat{y}_i) + (\hat{y}_i - \bar{y}), \quad (30)$$

где  $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i$  — ордината точки «наилучшей» прямой, имеющей абсциссу  $x_i$ .

Возведем обе части последнего представления в квадрат и просуммируем левые и правые части полученных для каждого  $i$  равенств:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 &= \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)(\hat{y}_i - \bar{y}). \end{aligned} \quad (31)$$

Входящая в правую часть сумма называется чаще всего остаточной дисперсией, выражаемой зависимостью

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2. \quad (32)$$

Заметим, что если  $\hat{\beta} = 0$ , то  $\hat{\alpha} = \bar{x}$  и  $\hat{y}_i \equiv \bar{x}$ .

Следовательно, при  $\hat{\beta} = 0$  получим следующее уравнение:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2. \quad (33)$$

При  $\hat{\beta} \neq 0$ , по самому определению прямой  $y = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x$ , имеем

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 < \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2. \quad (34)$$

Тенденция линейной связи между  $x$  и  $y$  выражена в максимальной степени, если остаточная дисперсия равна 0. При этом все точки  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  располагаются на одной прямой  $y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ . Тенденция линейной связи между переменными  $x$  и  $y$  не обнаруживается вовсе, если остаточная дисперсия совпадает с полной суммой квадратов  $TSS = \sum (y_i - \bar{y})^2$ .

Таким образом, есть определенные основания предложить в качестве «меры выраженности» линейной связи переменного коэффициента детерминации

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}, \quad (35)$$

изменяющегося в пределах от 0 до 1 ( $0 \leq R^2 \leq 1$ ). Значение  $R^2$  тем выше, чем больше доля объясненной моделью суммы квадратов  $ESS$  по отношению к полной сумме квадратов  $TSS$ .

Вспомогательная переменная  $\hat{y}$  берет на себя объяснение некоторой части изменчивости значений переменной  $y$ , и эта объясненная часть будет тем больше, чем выше значение коэффициента детерминации  $R^2$ .

Зависимость коэффициента эффективности маслоотделения  $\xi$  в маслоотделителе с использованием центробежных сил от числа Рейнольдса можно оценить, воспользовавшись регрессионной обработкой полученных экспериментальных данных и

рассчитанными значениями числа Рейнольдса.

Проведена проверка значимости полученной регрессионной модели.

При заданной доверительной вероятности  $\alpha = 0,00001$  получены следующие значения параметров регрессионной модели (10):  $c = 0,358$ ;  $n = 0,2548$ .

Полученная регрессионная модель имеет вид:

$$\xi(Re) = 0,358Re^{0,2548}. \quad (36)$$

Из графической зависимости коэффициента эффективности маслоотделения  $\xi$  от числа Рейнольдса  $Re$ , представленной на рис. 2, видно, что коэффициент эффективности маслоотделения может изменяться от 28 до 86 %.

Коэффициент эффективности маслоотделения  $\xi$  зависит от температуры смеси, скорости потока в кольцевом пространстве аппарата и скорости движения потока при изменении движения потока на 180°.

По результатам проведенных теоретических исследований и оценки полученных при моделировании процесса маслоотделения регрессионной (36) и графической (рис. 2) зависимостей была разработана конструкция аппарата с использованием центробежных сил для разделения двухфазного жидкостного потока.

Эксплуатация циркуляционного ресивера с маслоотделителем в системах охлаждения при различных температурах кипения подтвердила его высокую эффективность и надежность в работе.

ООО «Ижевскхиммаш» в г. Ижевске по заказам предприятий изготавливает циркуляционные и компаундные ресиверы с рассмотренной конструкцией маслоотделителя.

#### Список литературы

- Гущин А.В. Энергосберегающие процессы маслоотделения и аппараты аммиачных холодильных установок. – Краснодар: Минерва, 2006.
- Гущин А.В., Макаревич, В.П. Латышев. Маслоотделитель циркуляционного ресивера аммиачной холодильной установки // Холодильная техника. 2001. № 3.
- Патент 2151347 РФ, МКИ F25B 43/00 Ресивер холодильной установки / А.В. Гущин, О.А. Макаревич, В.П. Латышев. № 99107051/06; заявл. 01.04.99; Опубл. 20.06.2000; бюл. № 17.

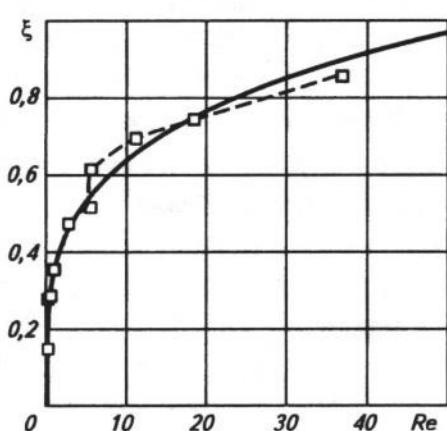


Рис. 2. Графическая зависимость коэффициента эффективности от числа Рейнольдса