УДК 631.243

Отвод тепла дыхания при хранении плодоовощной продукции

В.Е. КУЦАКОВА, М.И. КРЕМЕНЕВСКАЯ, В.А. САТАНИНА
Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий

The mathematical solution of the problem of heat removal from stacked plant products chilled to 0°C with air was considered. The products are represented as an infinite plate, where heat liberation occurs, exponentially rising as the temperature increases. The area of minimum values of heat transfer coefficients from the plate to the air flow is determined, at which the heat removal is in principle possible without unlimited growth of temperature in the plate. An example of the calculation of the necessary consumption of the cooling air for apples, stored in the boxes is given.

Как известно [1], при длительном хранении плодоовощной продукции одной из существенных проблем является отведение выделяемой ею физиологической теплоты (теплоты дыхания), для чего используется обдув продукции холодным воздухом.

Охлаждение растительной продукции и поддержание низких температур внутри штабеля продукта вызывают торможение протекающих в нем биохимических процессов, связанных с дыханием, а следовательно, обеспечивают лучшую сохранность питательных веществ. Низкая интенсивность теплоотвода приводит к неконтролируемому росту температуры продукта и нежелательному ухудшению его качества. Как правило, в камерах холодильного хранения плодоовощной продукции скорость обдува невелика, а следовательно, и коэффициент теплоотдачи от продукта к окружающему воздуху невысок, в то время как выделенная теплота дыхания чрезвычайно быстро (экспоненциально) возрастает с ростом температуры.

В настоящей работе будет рассмотрена простейшая модель охлаждения бесконечной пластины с внутренним тепловыделением, экспоненциально растущим с повышением температуры. Будет показано, что при каждом значении параметров пластины существует минимальное значение коэффициента теплоотдачи, при котором еще возможно стационарное течение процесса; при меньшем коэффициенте теплоотдачи материал пластины будет неограниченно разогреваться.

Рассмотрим бесконечную пластину толщиной $2R$, м. Проведем ось x поперек пластины так, что координата $x = 0$ отвечает центру, а $x = \pm R$ – поверхности пластины. Пусть $t(x)$, °С – температура внутри пластины, не зависящая от времени (процесс полагается стационарным). В пластине происходит выделение тепла $q(t)$, Дж/(м^3·с), экспоненциально зависящее от температуры:

$$q(t) = q_0 e^{kt}, \tag{1}$$

где q_0 – выделение тепла в единице объема за единицу времени при температуре окружающей среды $t_{хл}$, °С (принимается $t_{хл} = 0$ °С), Вт/м^3;
k – температурный коэффициент реакции, 1/°С.

На границе пластины происходит ее охлаждение окружающей средой с температурой $t_{хл}$ и коэффициентом теплоотдачи α, Вт/(м^2·К). Тогда математическая формулировка задачи (уравнение теплопроводности и два граничных условия) выглядит следующим образом:

$$\lambda \frac{d^2 t}{dx^2} + q_0 e^{kt} = 0;$$
$$\left.\frac{dt}{dx}\right|_{x=0} = 0; \tag{2}$$
$$\left.\frac{dt}{dx}\right|_{x=R} = -\alpha t\big|_{x=R},$$

где λ – коэффициент теплопроводности материала пластины, Вт/(м·К).

Уравнение (2) не содержит переменной x и допускает понижение порядка стандартным приемом [2]. В результате получится уравнение первого порядка

$$kR\frac{dt}{dx} = -\sqrt{A\left[\exp(kt_c) - \exp(kt)\right]};$$
$$A = \frac{2q_0 kR^2}{\lambda}, \tag{3}$$

где A – некоторый безразмерный комплекс, который представляет собой отношение характерного выделяемого тепла к характерному теплу, которое может быть передано теплопроводностью;
t_c – температура в центре пластины [учитываем первое граничное условие (2)].

Подставляя (3) во второе граничное условие (2), получим:

$$\sqrt{A\left[\exp(kt_c) - \exp(\theta)\right]} = \mathrm{Bi}\,\theta;$$
$$\theta = kt_s; \tag{4}$$
$$\mathrm{Bi} = \alpha R/\lambda,$$

где θ – безразмерная температура поверхности;
t_s – температура поверхности пластины, °С;
Bi – число Био (безразмерный коэффициент теплоотдачи).

Соотношениеие (3) представляет собой уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируя его, получим

$$x = \frac{R}{\sqrt{A\exp(kt_c)}} \times \\ \times \ln \frac{\sqrt{A\left[\exp(kt_c) - \exp(kt)\right]} + \sqrt{A\exp(kt_c)}}{\sqrt{A\left[\exp(kt_c) - \exp(kt)\right]} - \sqrt{A\exp(kt_c)}}. \quad (5)$$

Подставляя в (5) $x = R$, получим

$$\frac{\sqrt{A\left[\exp(kt_c) - \exp(kt)\right]} + \sqrt{A\exp(kt_c)}}{\sqrt{A\left[\exp(kt_c) - \exp(kt)\right]} - \sqrt{A\exp(kt_c)}} = \\ = \exp\left\{\sqrt{A\exp(kt_c)}\right\}. \quad (6)$$

Система уравнений (4) и (6) содержит две неизвестные величины: t_c и θ. Поскольку нас интересует лишь вторая (она определяет тепловой поток с поверхности), то выразим t_c из (4) и подставим в (6). Получим

$$\frac{\sqrt{\mathrm{Bi}^2\theta^2 + A\exp(\theta)} + \mathrm{Bi}\theta}{\sqrt{\mathrm{Bi}^2\theta^2 + A\exp(\theta)} - \mathrm{Bi}\theta} = \\ = \exp\left\{\sqrt{\mathrm{Bi}^2\theta^2 + A\exp(\theta)}\right\}. \quad (7)$$

Уравнение (7) представляет собой трансцендентное уравнение с одной неизвестной величиной θ, которое легко решается численно.

Итак, алгоритм расчета количества отводимого тепла следующий:

- определяем комплексы A и Bi;
- из уравнения (7) находим θ;
- рассчитываем отводимое с единицы поверхности за единицу времени тепло Q, Вт/м^2:

$$Q = \frac{\alpha\theta}{k} = \frac{\mathrm{Bi}\lambda\theta}{kR}. \quad (8)$$

Результаты численных экспериментов показывают, что уравнение (7) не всегда имеет решение. Существует область значений параметров Bi и A (когда первый не слишком мал, а второй не слишком велик), при которых уравнение (7) имеет 2 решения, причем больший корень неустойчив относительно малых возмущений θ, а меньший – устойчив. При достижении точкой (Bi, A) границы этой области два корня сливаются в один, а затем пропадают. Вне описанной области решений уравнения (7) не существует, значит, и решений стационарной задачи (2) не существует. Это, в свою очередь, означает, что пластина будет неограниченно разогреваться, поскольку теплоотдачи с поверхности недостаточно, чтобы отвести выделяющееся тепло. Это любопытное явление было ранее обнаружено в задаче о нагреве проводников электрическим током. В работе [4] рассматривалось тепловыделение, пропорциональное квадрату температуры (при первом краевом условии на границе). Позднее в работе [3] было показано, что это явление будет иметь место при любом достаточно быстро возрастающем с ростом температуры тепловыделении (достаточно, чтобы производная dq/dt неограниченно росла при $t \to \infty$). В таблице приведены предельные значения Bi при разных значениях A и отвечающие им значения Biθ (безразмерного теплового потока с поверхности).

Предельные значения Bi *и отвечающие им значения* Biθ.

A	Предельное значение безразмерного коэффициента теплоотдачи Bi	Безразмерный тепловой поток Bi θ	A	Предельное значение безразмерного коэффициента теплоотдачи Bi	Безразмерный тепловой поток Bi θ
0,10	0,14	0,13	0,80	1,83	1,00
0,15	0,22	0,19	0,85	2,04	1,06
0,20	0,30	0,26	0,90	2,27	1,11
0,25	0,37	0,33	0,95	2,53	1,18
0,30	0,48	0,40	1,00	2,83	1,24
0,35	0,57	0,46	1,10	3,55	1,36
0,40	0,68	0,52	1,20	4,52	1,47
0,45	0,78	0,57	1,30	5,92	1,57
0,50	0,90	0,63	1,40	8,08	1,68
0,55	1,02	0,69	1,50	11,9	1,74
0,60	1,16	0,75	1,60	20,7	1,84
0,65	1,30	0,82	1,70	60,2	1,93
0,70	1,46	0,88	1,76	∞	2,00
0,75	1,64	0,93			

В качестве примера рассмотрим хранение яблок в ящиках, охлаждаемых воздухом с температурой 0 °С при толщине штабеля $2R = 1{,}2$ м. Теплота дыхания яблок при 0 °С $q_0 = 12{,}1$ Вт/т $= 6{,}2$ Вт/м^3 (плотность яблок в засыпке принимаем 510 кг/м^3); температурный коэффициент дыхания $k = 0{,}093$ 1/°С (см. [1]); коэффициент теплопроводности яблок в засыпке $\lambda = 0{,}38$ Вт/(м·K). Отсюда получаем $A = 1{,}1$ и из таблицы – минимально возможное число Био Bi = 3,55, что отвечает минимально возможному коэффициенту теплоотдачи $\alpha = 2{,}25$ Вт/(м^2·K). Согласно [1] при высоте штабеля 5 м такой коэффициент теплоотдачи отвечает расходу воздуха 10 м^3/(т·ч). Снижение расхода воздуха в этих условиях приведет к неконтролируемому росту температур и возможной порче продукта.

При этом Bi θ = 1,36, что отвечает теплопотоку в $Q = 11{,}1$ Вт/м^2 = 43,6 Вт/т.

Список литературы

1. *Жадан В.З.* Теплофизические основы хранения сочного растительного сырья на пищевых предприятиях. – М.: Пищевая пром-сть, 1976.
2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: ГИФМЛ, 1961.
3. *Келлер Г.Б.* Некоторые позитонные задачи, вы-двигаемые нелинейной теорией генерации тепла // Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. – М.: Мир, 1974.
4. *Joseph D.D.* Non-linear heat generation and stability of the temperature distribution in conducting solids // Int. J. Heat Mass Transfer, 8 (1965).