

УДК 621.565:664.95

## Подход к расчету деформационной силы трения при резании охлажденной рыбы

Канд. техн. наук О. В. АГЕЕВ<sup>1</sup>, д-р техн. наук В. А. НАУМОВ,  
д-р техн. наук Ю. А. ФАТЫХОВ, Н. В. САМОЙЛОВА

<sup>1</sup>oleg.ageev@klgtu.ru

Калининградский государственный технический университет

*Предлагается подход к исследованию деформационных сил трения при резании охлажденной рыбы. Вязкоупругие свойства охлажденного рыбного сырья описываются трехэлементной реологической моделью. Использовано математическое описание профиля шероховатой поверхности ножа в виде безразмерной периодической функции с тремя гармониками. Проанализированы безразмерные контактные давления на микронеровности шероховатой поверхности режущего органа со стороны материала. Разработаны математические модели для расчета размерной и безразмерной сил трения. Показано, что при увеличении скорости обработки деформационная составляющая силы трения стремится к нулю. До определенной скорости скольжения имеется насыщенный контакт материала с неровностями грани. С усилением меры эластичности материала и удлинением шероховатой грани ножа рассматриваемая сила монотонно повышается. Зависимость безразмерной ширины площадки контакта микровыступов с материалом от меры эластичности является монотонной, причем зависимость указанной безразмерной ширины от безразмерной скорости имеет немонотонный характер. При значениях меры эластичности 5, безразмерной скорости 0,001; 0,03; 0,12 максимальная амплитуда контактного давления составляет 1,250; 1,973; 3,635, соответственно. При значениях меры эластичности 3; 5; 8; 12 минимальные значения безразмерной ширины контактной площадки составляют 0,615; 0,593; 0,575; 0,563, соответственно, предельное значение составляет 0,679. При значениях меры эластичности 5; безразмерной длины грани 10; 20; 30; 50 значения максимума деформационной силы трения составляют соответственно 9,345; 18,693; 28,040; 46,724. При значениях безразмерной длины грани 20; меры эластичности 2; 5; 8; 12 значения максимума силы составляют соответственно 7,471; 18,693; 29,914; 44,876.*

**Ключевые слова:** рыба, резание, сила, трение, форма, нож, грань, реология, вязкоупругость.

### Информация о статье:

Поступила в редакцию 07.08.2019, принята к печати 09.10.2019

DOI: 10.17586/1606-4313-2019-18-4-49-56

Язык статьи — русский

### Для цитирования:

Агеев О. В., Наумов В. А., Фатыхов Ю. А., Самойлова Н. В. Подход к расчету деформационной силы трения при резании охлажденной рыбы // Вестник Международной академии холода. 2019. № 4. С. 49–56.

## Approach to computation of deformation friction force during chilled fish cutting

Ph. D. O. V. AGEEV<sup>1</sup>, D. Sc. V. A. NAUMOV, D. Sc. J. A. FATYKHOV, N. V. SAMOJLOVA

<sup>1</sup>oleg.ageev@klgtu.ru

Kaliningrad State Technical University

*The approach to research of deformation friction forces during chilled fish cutting is proposed. The viscoelastic properties of chilled fish raw material are described by a three-element rheological model. The mathematical description of the knife rough surface profile in the form of a dimensionless periodic function with three harmonics has been used. The dimensionless contact pressures over the microprotrusions of the cutting body rough surface from the material has been analyzed. A mathematical model for computation the dimensional and dimensionless friction forces has been developed. It is shown that with an increase in the processing speed, the deformation component of the friction force tends to zero. Up to a certain sliding speed there is a full contact of the material with the irregularities of the edge. With an increase in elasticity and lengthening of the edge of the knife the considered force increases monotonously. The dependence of the dimensionless width of the micro protrusions contact area with the material on elasticity is monotonic, and the dependence of the indicated dimensionless width on the dimensionless speed is nonmonotonic. With values of elasticity measure 5, dimensionless speed of 0.001; 0.03; and 0.12, maximum amplitude of contact pressure is 1.250; 1.973; and 3.635, respectively. With values of the elasticity measure 3; 5; 8; and 12, the minimum values of the dimensionless width of the contact pad are 0.615; 0.593; 0.575; and 0.563, respectively, the limit value is 0.679. With values of the elasticity measure 5; dimensionless length of the edge 10; 20; 30; and 50, values of the maximum deformation friction force are 9.345; 18.693; 28.040; and 46.724,*

respectively. With values of the dimensionless length of the edge 20; elasticity measures 2; 5; 8; and 12, values of maximum strength are 7.471; 18.693; 29.914; and 44.876, respectively.

**Keywords:** fish, cutting, force, friction, profile, knife, edge, rheology, viscoelasticity.

#### Article info:

Received 07/08/2019, accepted 09/10/2019

DOI: 10.17586/1606-4313-2019-18-4-49-56

Article in Russian

#### For citation:

Ageev O. V., Naumov V. A., Fatykhov J. A., Samojlova N. V. Approach to computation of deformation friction force during chilled fish cutting. *Vestnik Mezhdunarodnoi akademii kholoda*. 2019. No 4. p. 49–56.

### Введение

В настоящее время, основным технологическим процессом при первичной обработке охлажденного сырья на береговых предприятиях и судах является резание рыбы лезвием. Совершенствование формы ножей и режимов обработки, имеющие своей целью обеспечение ресурсосбережения, а также соответствующее улучшение технико-экономических показателей пищевого оборудования, неразрывно связаны с постоянным углублением и совершенствованием знаний о природе явлений, происходящих при взаимодействии материала с гранями режущего органа. Это требует дальнейшего совершенствования теории резания рыбы, а также анализа параметров процесса для последующего выбора оптимальной геометрии рабочих органов.

В суммарное вредное сопротивление резанию существенный вклад вносит деформационная составляющая силы трения. Исследование закономерностей трибологического взаимодействия сырья с режущими органами оборудования привлекает внимание отечественных и зарубежных ученых. В статье [1] проанализировано влияние трения и режимных параметров обработки на суммарные силы сопротивлений при резании вязкоупругих материалов. В работе [2] проведено исследование механического поведения высокоэластичных материалов в процессе их деформирования и разрушения. В статьях [3, 4] рассмотрен подход к определению оптимальных форм режущих органов для обработки упругих материалов. Работа [5] посвящена анализу трибологических явлений при обработке пищевых материалов с различными скоростями резания. В исследованиях [6, 7] изложены результаты численного моделирования контактного взаимодействия на границе эластичных и твердых материалов. В статьях [8, 9] проанализирован процесс трения различных сред при изменении режимов скольжения внедренных в них инденторов. В публикациях [10, 11] предложены математические модели для определения сил сопротивления формы ножей с различными профилями при резании рыбы.

Однако, несмотря на изложенные в данных работах результаты исследований, в настоящее время отсутствует аналитическое описание деформационных сил трения, действующих на рабочий орган при резании охлажденной рыбы с учетом различной формы шероховатости. К тому же, для оптимизации геометрии ножа по критерию минимального сопротивления резанию, требуется математическое моделирование сил трения, действующих на его грани, учитывая при этом регулярную шерохова-

тость поверхности. На решение данных задач и направлено проводимое исследование.

### Материалы и методы исследования

В качестве материала исследования бралось охлажденное рыбное сырье. Мясо рыбы представляет собой волокнистый капиллярно-пористый коллоидный материал сложного строения [12, 13]. Основу материала составляют мышечные волокна и структурная сетка из плотно соединительной ткани, а также вязкие растворы, включающие воду, растворимые белки, азотистые и минеральные вещества. Это позволило при моделировании процесса резания охлажденной рыбы принять приближенную структурно-механическую модель Максвелла — Томсона. Мышечная ткань в модельном представлении представляет собой структуру, образованную параллельно расположенными тонкими стержнями — элементарными волокнами.

Механическое поведение элементарного волокна при исследовании сил трения описывается вышеуказанной реологической моделью материала, которая выбрана на основе экспериментальных исследований. При внедрении ножа в материал при контакте с режущей кромкой элементарное волокно испытывает деформацию растяжения и разрушается при достижении предельного условий, выделяя механически связанную влагу. При контакте с наклонными и боковыми гранями ножа разрезанные части волокон подвергаются деформации стесненного сжатия. При этом предполагается, что элементарные волокна допускают одноосное растяжение и сжатие, что обуславливает их представление в виде гибких стержней, а не гибких нитей.

Аналитическое описание регулярного микрорельефа режущих органов рыбоперерабатывающего оборудования опирается на физико-технологическую теорию неровностей поверхности. Согласно указанной теории, параметры микрорельефа поверхности могут быть разложены на систематическую составляющую, определяемую средними значениями управляемых факторов процесса механообработки, а также на случайную составляющую, вызываемую случайными вариациями тех же и всех остальных факторов (теорема разложения). Таким образом, шероховатость поверхности описывается суммой детерминированной и случайной функций. При использовании достаточной серии металлорежущего инструмента при усреднении профиль микронеровностей с хорошим приближением описывается периодическим законом. Случайная составляющая шероховатости по-

верхности в основном происходит под действием вибраций технологической системы.

### Математическое моделирование

Модель периодического профиля поверхности, содержащую три гармоники, получим в следующем виде:

$$f_3(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{2\pi \cdot 1x}{S_0} + \bar{\psi}_1\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi \cdot 2x}{S_0} + \bar{\psi}_2\right) + a_3 \cos\left(\frac{2\pi \cdot 3x}{S_0} + \bar{\psi}_3\right). \quad (1)$$

где  $S_0$  — шаг профиля;  $a_n$ ,  $\bar{\psi}_n$  — коэффициент Фурье и фазовый угол 1, 2, 3-й компоненты профиля;  $\frac{a_0}{2}$  — ну-

левой член разложения. В результате промежуточных преобразований, получим из уравнения (1) размерное и безразмерное выражения, описывающие периодический профиль шероховатой поверхности ножа, включающий три гармоники:

$$f_3(x) = \frac{A}{2} \cdot \left\{ \cos^2\left(\frac{2\pi \cdot x}{S_0} + \bar{\psi}\right) + \cos^3\left(\frac{2\pi \cdot x}{S_0} + \bar{\psi}\right) \right\}; \quad (2)$$

$$\bar{f}_3(\bar{x}) = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \cos^2(2\pi \cdot \bar{x} + \bar{\psi}) + \cos^3(2\pi \cdot \bar{x} + \bar{\psi}) \right\}. \quad (3)$$

В системе координат  $Oxy$  при фазовом угле  $\bar{\psi} = \pi$  относительную деформацию элементарного волокна  $\epsilon_x$  и скорость ее изменения  $d\epsilon_x/dx$  по оси  $Ox$  выразим следующим образом, обозначив  $x$  — координату волокна,  $t$  — время с момента начала деформирования,  $u$  — скорость движения шероховатой поверхности ножа в материале,  $A_0$  — высоту деформируемого слоя:

$$\epsilon_{x3} = \frac{f_3(x)}{A_0} = \frac{A}{2A_0} \left\{ \cos^2\left(\frac{2\pi x}{S_0} + \pi\right) + \cos^3\left(\frac{2\pi x}{S_0} + \pi\right) \right\} = \frac{A}{2A_0} \left\{ \cos^2\left(\frac{2\pi x}{S_0}\right) - \cos^3\left(\frac{2\pi x}{S_0}\right) \right\} = \frac{A}{2A_0} \left\{ \cos^2\left(\frac{2\pi u \cdot t}{S_0}\right) - \cos^3\left(\frac{2\pi u \cdot t}{S_0}\right) \right\} \quad (4)$$

$$\frac{d\epsilon_{x3}}{dx} = \frac{f'_3(x)}{A_0} = \pi \frac{A}{A_0 S_0} \left[ 3 \cos^2\left(\frac{2\pi x}{S_0}\right) - 2 \cos\left(\frac{2\pi x}{S_0}\right) \right] \sin\left(\frac{2\pi x}{S_0}\right). \quad (5)$$

Введем следующие обозначения:  $E_0$  — модуль Юнга;  $E_1$  — высокоэластичный модуль упругости материала;  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости материала;  $e_{01} = E_0/E_1$  — мера эластичности;  $l_k$  — длина прямой режущей кромки;  $u$  — скорость движения материала относительно шероховатой поверхности ножа;  $\xi = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1} = \frac{E_0}{1 + E_0/E_1}$  — длительный модуль упругости;

$k = -\frac{E_0 + E_1}{\eta u}$ ;  $\vartheta = \frac{2\pi^2 E_0}{\xi k} = \frac{2\pi^2}{k} (e_{01} + 1)$ ;  $p_9(x)$  — контактное давление материала на микровыступ, форма которого содержит три гармоники.

С учетом (4), (5) и  $dx = u \cdot dt$  дифференциальное уравнение состояния материала [14] примет вид:

$$\frac{dp_9(x)}{dx} v + p_9(x) \frac{E_0 + E_1}{\eta} = \frac{\pi A u E_0}{A_0 S_0} \cdot \left[ 3 \cos^2\left(\frac{2\pi x}{S_0}\right) - 2 \cos\left(\frac{2\pi x}{S_0}\right) \right] \sin\left(\frac{2\pi x}{S_0}\right) +$$

$$+ \frac{A E_0 E_1}{2 A_0 \eta} \left[ \cos^2\left(\frac{2\pi x}{S_0}\right) - \cos^3\left(\frac{2\pi x}{S_0}\right) \right]. \quad (6)$$

В результате решения задачи Коши, с учетом начального условия  $x = 0$ ;  $p(x) = 0$  получим выражение для контактного давления материала в произвольной точке микровыступа шероховатой поверхности ножа:

$$p_9(x) = \frac{A \xi k}{A_0} \cdot \left\{ -\frac{0,75 \pi e_{01} S_0}{4 \pi^2 + k^2 S_0^2} \sin\left(\frac{2\pi x}{S_0}\right) - \frac{0,375 (2\vartheta + k S_0^2)}{4 \pi^2 + k^2 S_0^2} \cos\left(\frac{2\pi x}{S_0}\right) + \frac{\pi e_{01} S_0}{16 \pi^2 + k^2 S_0^2} \sin\left(\frac{4\pi x}{S_0}\right) + \frac{0,25 (8\vartheta + k S_0^2)}{16 \pi^2 + k^2 S_0^2} \cos\left(\frac{4\pi x}{S_0}\right) - \frac{0,75 \pi e_{01} S_0}{36 \pi^2 + k^2 S_0^2} \sin\left(\frac{6\pi x}{S_0}\right) - \frac{0,125 (18\vartheta + k S_0^2)}{36 \pi^2 + k^2 S_0^2} \cos\left(\frac{6\pi x}{S_0}\right) + \frac{0,5}{k} \right\} + C_9 \exp(kx). \quad (7)$$

С учетом выражения (7), деформационную силу трения по длине грани  $x_B$  приближенно определим в виде интеграла [15–17]:

$$\bar{F}_2 = l_k \cdot \int_0^{x_B} (f'_3(x) \cdot p_9(x)) dx. \quad (8)$$

Введем следующие обозначения:

$$J_1 = \frac{1}{(4\pi^2 + k^2 S_0^2)}; J_2 = \frac{1}{(16\pi^2 + k^2 S_0^2)}; J_3 = \frac{1}{(36\pi^2 + k^2 S_0^2)} \quad (9)$$

$$I_1 = \vartheta + 0,5 k S_0^2; I_2 = \vartheta + 0,125 k S_0^2; I_3 = 2\vartheta + k S_0^2;$$

$$I_4 = 8\vartheta + k S_0^2; I_5 = 18\vartheta + k S_0^2.$$

Подставим в (8) выражения (2), (7), используем формулу Ньютона-Лейбница и с учетом обозначений (9) получим из (8) выражение для деформационной силы трения:

$$\begin{aligned} \bar{F}_2 = \frac{A^2 \xi k l_k}{A_0} \times & \left\{ \frac{J_1}{512} \left[ 96 \pi e_{01} S_0 \sin\left(\frac{2\pi x_B}{S_0}\right) - 32 \pi e_{01} S_0 \sin\left(\frac{6\pi \cdot x_B}{S_0}\right) + \right. \right. \\ & + 18 \pi e_{01} S_0 \sin\left(\frac{8\pi x_B}{S_0}\right) - 144 \pi e_{01} x_B - 48 I_3 \cos\left(\frac{2\pi x_B}{S_0}\right) + \\ & + 36 I_3 \cos\left(\frac{4\pi x_B}{S_0}\right) - 16 I_3 \cos\left(\frac{6\pi x_B}{S_0}\right) + 9 I_3 \cos\left(\frac{8\pi x_B}{S_0}\right) \left. \right] + \\ & + \frac{J_2}{320} \left[ 120 \pi e_{01} S_0 \sin\left(\frac{2\pi x_B}{S_0}\right) - 20 \pi e_{01} S_0 \sin\left(\frac{6\pi x_B}{S_0}\right) + \right. \\ & + 20 \pi e_{01} S_0 \sin\left(\frac{8\pi x_B}{S_0}\right) - 12 \pi e_{01} S_0 \sin\left(\frac{10\pi x_B}{S_0}\right) - 160 \pi e_{01} x_B - \\ & - 5 I_4 \cos\left(\frac{6\pi x_B}{S_0}\right) + 5 I_4 \cos\left(\frac{8\pi x_B}{S_0}\right) - 3 I_4 \cos\left(\frac{10\pi x_B}{S_0}\right) \left. \right] + \\ & + \frac{J_3}{32} \left[ 6 \pi e_{01} S_0 \sin\left(\frac{2\pi x_B}{S_0}\right) - \frac{9}{4} \pi e_{01} S_0 \sin\left(\frac{4\pi x_B}{S_0}\right) + \frac{9}{8} \pi e_{01} S_0 \sin\left(\frac{8\pi x_B}{S_0}\right) - \right. \\ & - \frac{6\pi}{5} e_{01} S_0 \sin\left(\frac{10\pi x_B}{S_0}\right) + \frac{3\pi}{4} e_{01} S_0 \sin\left(\frac{12\pi x_B}{S_0}\right) - 9 \pi^2 e_{01} x_B + \\ & + I_5 \cos\left(\frac{2\pi x_B}{S_0}\right) - \frac{3}{8} I_5 \cos\left(\frac{4\pi x_B}{S_0}\right) + \frac{3}{16} I_5 \cos\left(\frac{8\pi x_B}{S_0}\right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{I_5}{5} \cos\left(\frac{10\pi x_B}{S_0}\right) + \frac{I_5}{8} \cos\left(\frac{12\pi x_B}{S_0}\right) \Bigg] - \\
& -\frac{1}{16 \cdot k} \left[ 3 \cos\left(\frac{2\pi x_B}{S_0}\right) - 2 \cos\left(\frac{4\pi x_B}{S_0}\right) + \cos\left(\frac{6\pi x_B}{S_0}\right) \right] + \\
& + 0,25\pi \left( 0,375J_1I_3 - 0,25J_2I_4 + 0,125J_3I_5 - \frac{0,5}{k} \right) \exp(kx_B) \left[ 3J_1kS_0 \sin\left(\frac{2\pi x_B}{S_0}\right) - \right. \\
& - 4 \cdot J_2 \cdot k \cdot S_0 \cdot \sin\left(\frac{4\pi x_B}{S_0}\right) + 3 \cdot J_3 k S_0 \sin\left(\frac{6\pi x_B}{S_0}\right) - 6\pi J_1 \cos\left(\frac{2\pi x_B}{S_0}\right) + \\
& + 16\pi J_2 \cos\left(\frac{4\pi x_B}{S_0}\right) - 18\pi J_3 \cos\left(\frac{6\pi x_B}{S_0}\right) \Bigg] + \frac{19J_1I_3}{512} + \frac{3J_2I_4}{320} - \frac{59J_3I_5}{2560} + \frac{1}{8k} - \\
& - 0,25\pi \left( 0,375J_1I_3 - 0,25J_2I_4 + 0,125J_3I_5 - \frac{0,5}{k} \right) (16\pi J_2 - 6\pi J_1 - 18\pi J_3) \Bigg\} \quad (10).
\end{aligned}$$

Введем безразмерную скорость  $\bar{u}$  и безразмерную координату  $\bar{x}$ :

$$u = \bar{u} \frac{S_0(E_0 + E_1)}{\eta}; \quad x = \bar{x} S_0. \quad (11)$$

С учетом (11) и обозначений  $F_{20} = (A^2 \xi l_k) / A_0$ ;  $\bar{F}_2 = \bar{F}_2 F_{20}$  в результате промежуточных преобразований получим выражение для безразмерной деформационной силы трения:

$$\begin{aligned}
\bar{F}_2 = \frac{\pi}{\bar{u}} \Bigg\{ & -\frac{J_1}{16} \left[ e_{01} \left( 3 \sin(2\pi \bar{x}_B) - \sin(6\pi \bar{x}_B) + \frac{9}{16} \sin(8\pi \bar{x}_B) - \frac{9}{2} \bar{x}_B \right) - \right. \\
& - \frac{\bar{I}_3}{2\pi} \left( 3 \cdot \cos(2\pi \cdot \bar{x}_B) - \frac{9}{4} \cdot \cos(4\pi \cdot \bar{x}_B) + \right. \\
& \left. \left. + \cos(6\pi \cdot \bar{x}_B) - \frac{9}{16} \cdot \cos(8\pi \cdot \bar{x}_B) \right) \right] - \\
& - \frac{3 \cdot J_2}{80} \left[ e_{01} \left( 10 \cdot \sin(2\pi \cdot \bar{x}_B) - \frac{5}{3} \cdot \sin(6\pi \cdot \bar{x}_B) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{5}{3} \cdot \sin(8\pi \cdot \bar{x}_B) - \sin(10\pi \cdot \bar{x}_B) - \frac{40}{3} \cdot \bar{x}_B \right) - \right. \\
& - \frac{5 \cdot \bar{I}_4}{12\pi} \left( \cos(6\pi \cdot \bar{x}_B) - \cos(8\pi \cdot \bar{x}_B) + \frac{3}{5} \cdot \cos(10\pi \cdot \bar{x}_B) \right) \Bigg] - \\
& - \frac{J_3}{32} \left[ e_{01} \left( 6 \cdot \sin(2\pi \cdot \bar{x}_B) - \frac{9}{4} \cdot \sin(4\pi \cdot \bar{x}_B) + \frac{9}{8} \cdot \sin(8\pi \cdot \bar{x}_B) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{6}{5} \cdot \sin(10\pi \cdot \bar{x}_B) + \frac{3}{4} \cdot \sin(12\pi \cdot \bar{x}_B) - 9\pi \cdot \bar{x}_B \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\bar{I}_5}{\pi} \left( \cos(2\pi \cdot \bar{x}_B) - \frac{3}{8} \cdot \cos(4\pi \cdot \bar{x}_B) + \frac{3}{16} \cdot \cos(8\pi \cdot \bar{x}_B) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{5} \cdot \cos(10\pi \cdot \bar{x}_B) + \frac{1}{8} \cdot \cos(12\pi \cdot \bar{x}_B) \right) \right] - \\
& - \frac{\bar{u}}{8\pi} \left[ \frac{3}{2} \cdot \cos(2\pi \cdot \bar{x}_B) - \cos(4\pi \cdot \bar{x}_B) + \frac{1}{2} \cdot \cos(6\pi \cdot \bar{x}_B) - 1 \right] + \\
& + 0,25 \cdot (0,375 \cdot J_1 \cdot \bar{I}_3 - 0,25 \cdot J_2 \cdot \bar{I}_4 + 0,125 \cdot J_3 \cdot \bar{I}_5 + \\
& + 0,5 \cdot \bar{u}) \cdot \exp\left(-\frac{\bar{x}_B}{\bar{u}}\right) \left[ \frac{3 \cdot J_1}{\bar{u}} \cdot \sin(2\pi \cdot \bar{x}_B) - \right. \\
& - \frac{4 \cdot J_2}{\bar{u}} \cdot \sin(4\pi \cdot \bar{x}_B) + \frac{3 \cdot J_3}{\bar{u}} \cdot \sin(6\pi \cdot \bar{x}_B) + \\
& + 6\pi \cdot J_1 \cdot \cos(2\pi \cdot \bar{x}_B) - 16\pi \cdot J_2 \cdot \cos(4\pi \cdot \bar{x}_B) + \\
& \left. + 18\pi \cdot J_3 \cdot \cos(6\pi \cdot \bar{x}_B) \right] - \frac{19 \cdot J_1 \cdot \bar{I}_3}{512\pi} - \frac{3 \cdot J_2 \cdot \bar{I}_4}{320\pi} + \frac{59 \cdot J_3 \cdot \bar{I}_5}{2560\pi} + \\
& + 0,25 \cdot (0,375 \cdot J_1 \cdot \bar{I}_3 - 0,25 \cdot J_2 \cdot \bar{I}_4 + 0,125 \cdot J_3 \cdot \bar{I}_5 + \\
& \left. 0,5 \cdot \bar{u}) \cdot (16\pi \cdot J_2 - 6\pi \cdot J_1 - 18\pi \cdot J_3) \right\} \quad (12).
\end{aligned}$$

Получим также выражение для безразмерного контактного давления:

$$\begin{aligned}
\bar{p}_9(\bar{x}) = \frac{1}{\bar{u}} \Bigg\{ & J_1 \cdot 0,75 \cdot \pi \cdot e_{01} \cdot \sin(2\pi \cdot \bar{x}) - J_1 \cdot 0,375 \cdot \left( \frac{1}{\bar{u}} + \right. \\
& \left. + 4\pi^2 \cdot \bar{u} \cdot (e_{01} + 1) \right) \cdot \cos(2\pi \cdot \bar{x}) - \\
& - J_2 \cdot \pi \cdot e_{01} \cdot \sin(4\pi \cdot \bar{x}) + J_2 \cdot 0,25 \cdot \left( \frac{1}{\bar{u}} + 16\pi^2 \cdot \bar{u} \cdot (e_{01} + 1) \right) \cdot \cos(4\pi \cdot \bar{x}) + \\
& + J_3 \cdot 0,75 \cdot \pi \cdot e_{01} \cdot \sin(6\pi \cdot \bar{x}) - J_3 \cdot 0,125 \cdot \left( \frac{1}{\bar{u}} + \right. \\
& \left. + 36\pi^2 \cdot \bar{u} \cdot (e_{01} + 1) \right) \cdot \cos(6\pi \cdot \bar{x}) + 0,5 \cdot \bar{u} + \\
& + \left[ J_1 \cdot 0,375 \cdot \left( \frac{1}{\bar{u}} + 4\pi^2 \cdot \bar{u} \cdot (e_{01} + 1) \right) - J_2 \cdot 0,25 \cdot \left( \frac{1}{\bar{u}} + 16\pi^2 \cdot \bar{u} \cdot (e_{01} + 1) \right) + \right. \\
& \left. + J_3 \cdot 0,125 \cdot \left( \frac{1}{\bar{u}} + 36\pi^2 \cdot \bar{u} \cdot (e_{01} + 1) \right) - 0,5 \cdot \bar{u} \right] \cdot \exp\left(-\frac{\bar{x}}{\bar{u}}\right) \Bigg\}. \quad (13)
\end{aligned}$$

## Результаты

На рис. 1, 2 показано соответствие контактных давлений форме микронеровностей шероховатой поверхности ножа, содержащей три гармоники, а также значения указанных давлений при трех различных значениях безразмерной скорости и меры эластичности материала.

Зависимости безразмерной координаты  $\bar{x}_c$  крайней контактной точки единичного микровыступа от безразмерной скорости, при четырех различных мерах эластичности приведены на рис. 3. График на рис. 4 демонстрирует соответствие ширины площадки контакта микровыступа с материалом различным значениям безразмерной скорости скольжения и меры эластичности.

Наряду с вышеизложенным, разработанная математическая модель (12) позволяет варьировать безразмерной скоростью скольжения, мерой эластичности материала, безразмерной длиной грани ножа для исследования зависимостей безразмерной деформационной силы трения  $\bar{F}_2$  от указанных параметров.

На рис. 5 показано влияние безразмерной скорости на безразмерную деформационную составляющую рассматриваемой силы при различных длинах грани и мерах эластичности, на рис. 6 — влияние длины грани на указанную составляющую при различных скоростях скольжения и мерах эластичности. Изменение безразмерной деформационной силы трения, в зависимости от длины грани и скорости, показано на рис. 7, на рис. 8 — от скорости и реологического параметра материала, соответственно.

## Обсуждение результатов

Анализируя полученные результаты, представленные графически на рис. 1–8, можем утверждать, что при форме микровыступа, соответствующей трехгармонической модели, до определенной безразмерной скорости имеется насыщенный контакт материала с неровностями грани, при этом крайняя контактная точка отсутствует: материал контактирует с микровыступом по всей его длине (см. рис 1). С ростом безразмерной скорости насыщенный контакт утрачивается. При значениях меры эластичности 5, безразмерной скорости 0,001; 0,03; 0,12 максимальная амплитуда нормальных контактных давлений составляет 1,250; 1,973; 3,635, соответственно.

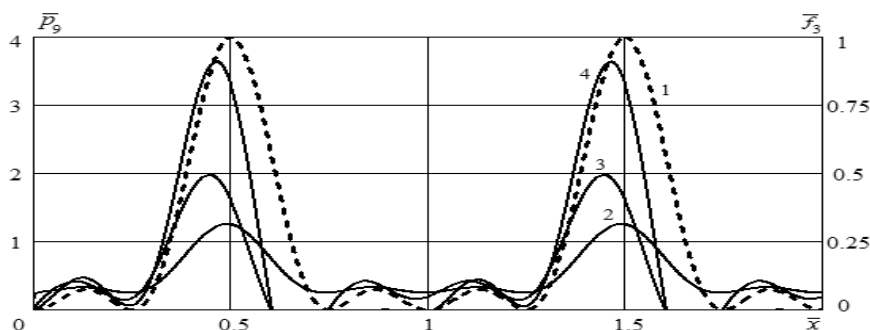


Рис. 1. Профиль шероховатой поверхности ножа и безразмерные контактные давления на выступы при различных значениях безразмерной скорости скольжения ( $e_{01}=5$ ):  
1 — периодический микрорельеф поверхности грани в безразмерном виде  $\bar{f}_3(\bar{x})$ ;  
2 — контактное давление при  $\bar{u}=0,002$ ; 3 —  $\bar{u}=0,03$ ; 4 —  $\bar{u}=0,12$

Fig. 1. The profile of the rough surface of the knife and dimensionless contact pressures to protrusions at different values of the dimensionless sliding speed ( $e_{01}=5$ ):  
1 — periodic microrelief of the facet surface in a dimensionless form  $\bar{f}_3(\bar{x})$ ;  
2 — contact pressure at  $\bar{u}=0,002$ ; 3 —  $\bar{u}=0,03$ ; 4 —  $\bar{u}=0,12$

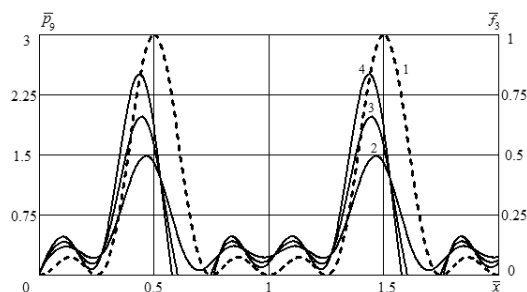


Рис. 2. Профиль шероховатой поверхности ножа и безразмерные контактные давления на выступы при различных значениях меры эластичности материала ( $\bar{u}=0,03$ ):  
1 — периодический микрорельеф поверхности грани в безразмерном виде  $\bar{f}_3(\bar{x})$ ; 2 — контактное давление при  $e_{01}=2$ ; 3 —  $e_{01}=5$ ; 4 —  $e_{01}=8$

Fig. 2. The profile of the rough surface of the knife and dimensionless contact pressures to protrusions at various values of the measure of elasticity of the material ( $\bar{u}=0,03$ ):  
1 — periodic microrelief of the facet surface in a dimensionless form  $\bar{f}_3(\bar{x})$ ; 2 — contact pressure at  $e_{01}=2$ ; 3 —  $e_{01}=5$ ; 4 —  $e_{01}=8$

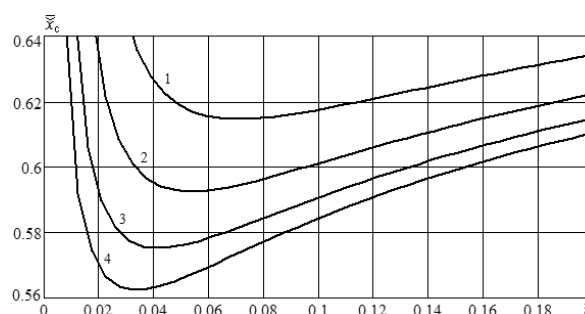


Рис. 3. Зависимость безразмерной координаты  $\bar{x}_A$  крайней точки контакта выступа шероховатой поверхности от безразмерной скорости при четырех различных значениях меры эластичности материала:  
1 —  $e_{01}=3$ ; 2 —  $e_{01}=5$ ; 3 —  $e_{01}=8$ ; 4 —  $e_{01}=12$

Fig. 3. The dependence of the dimensionless coordinate  $\bar{x}_A$  of the extreme contact point of the protrusion of a rough surface on the dimensionless velocity at four different values of the measure of elasticity of the material:  
1 —  $e_{01}=3$ ; 2 —  $e_{01}=5$ ; 3 —  $e_{01}=8$ ; 4 —  $e_{01}=12$

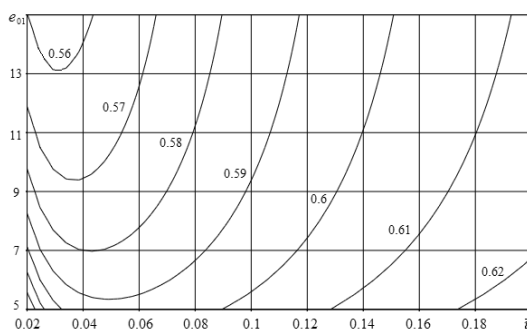


Рис. 4. Зависимость безразмерной координаты  $\bar{x}_A$  крайней точки контакта микровыступа шероховатой поверхности от безразмерной скорости и меры эластичности материала

Fig. 4. Dependence of the dimensionless coordinate  $\bar{x}_A$  of the extreme contact point of the microprotrusion of a rough surface on the dimensionless speed and measure of the elasticity of the material

Согласно рис. 2, величина безразмерного контактного давления возрастает при повышении безразмерной меры эластичности. В связи с чем, усиление указанного реологического параметра сопровождается смещением области контакта и утратой ее симметричности. При малых значениях реологического параметра имеется насыщенный контакт, который теряется с увеличением меры эластичности.

Согласно рис. 3, при значениях меры эластичности 3; 5; 8; 12 минимальные значения безразмерной ширины контактной площадки составляют 0,615; 0,593; 0,575; 0,563, соответственно, с ростом безразмерной скорости предельное значение составляет 0,679. Расчеты показывают, что ширина площадки контакта немонотонно изменяется при увеличении безразмерной скорости скольжения с достижением минимума.

Результаты моделирования на рис. 4 показывают, что безразмерная ширина контактной площадки монотонно

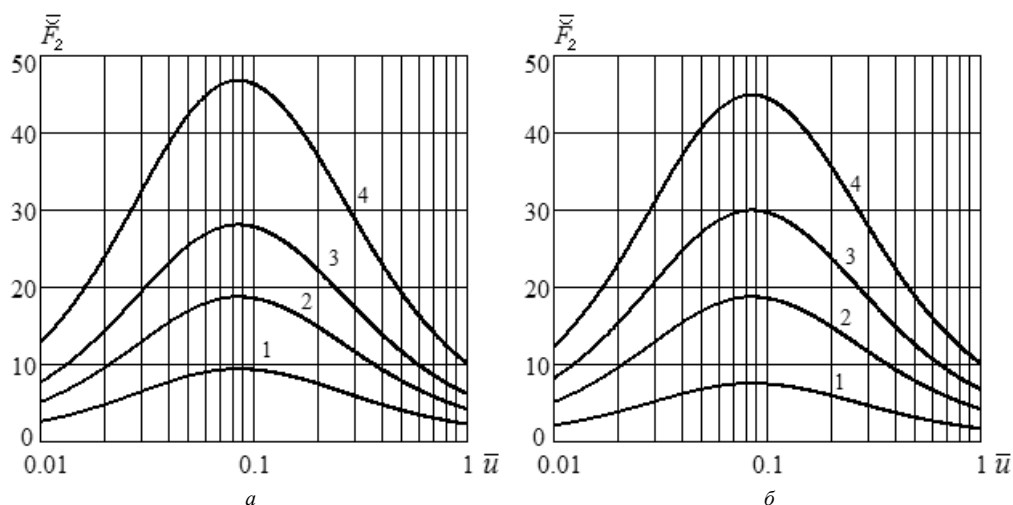


Рис. 5. Влияние безразмерной скорости скольжения на безразмерную силу трения (шкала  $\bar{u}$  — логарифмическая):

а — при различных значениях безразмерной длины грани ( $e_{01} = 5$ ): 1 —  $\bar{x}_B = 10$ ; 2 —  $\bar{x}_B = 20$ ; 3 —  $\bar{x}_B = 30$ ; 4 —  $\bar{x}_B = 50$ ;  
 б — при различных значениях меры эластичности материала ( $\bar{x}_B = 20$ ): 1 —  $e_{01} = 2$ ; 2 —  $e_{01} = 5$ ; 3 —  $e_{01} = 8$ ; 4 —  $e_{01} = 12$

Fig. 5. The impact of the dimensionless sliding speed on the dimensionless friction force (scale  $\bar{u}$  — logarithmic):

а — at various values of the dimensionless length of the facet ( $e_{01} = 5$ ); б — at different values of the measure of material elasticity ( $\bar{x}_B = 20$ )

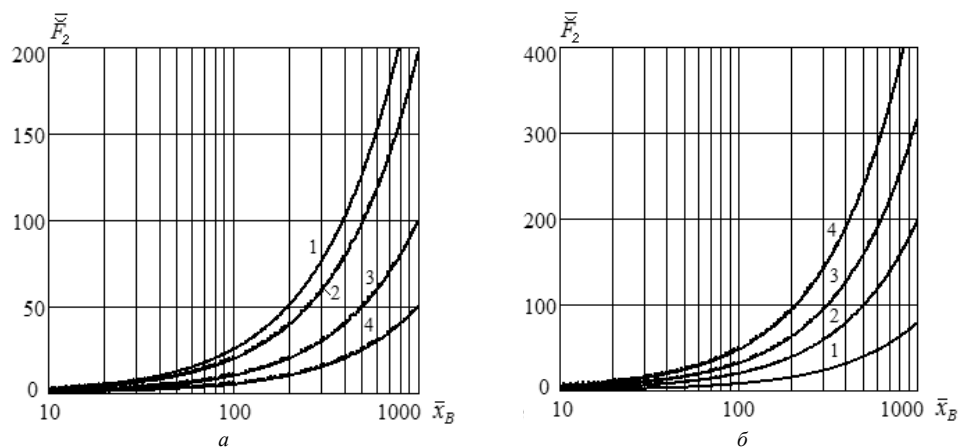


Рис. 6. Влияние безразмерной длины грани на безразмерную силу трения (шкала  $\bar{x}_B$  — логарифмическая):

а — при различных значениях безразмерной скорости скольжения ( $e_{01} = 5$ ): 1 —  $\bar{u} = 0,01$ ; 2 —  $\bar{u} = 1$ ; 3 —  $\bar{u} = 2$ ; 4 —  $\bar{u} = 4$ ;  
 б — при различных значениях меры эластичности материала ( $\bar{u} = 1$ ): 1 —  $e_{01} = 2$ ; 2 —  $e_{01} = 5$ ; 3 —  $e_{01} = 8$ ; 4 —  $e_{01} = 15$

Fig. 6. The impact of the dimensionless length of the edge on the dimensionless friction force (scale  $\bar{x}_B$  — logarithmic):

а — at various values of the dimensionless sliding speed ( $e_{01} = 5$ ); б — at different values of the measure of material elasticity ( $\bar{u} = 1$ )

зависит от меры эластичности материала и немонотонно зависит от безразмерной скорости скольжения. При этом контактная площадка становится замкнутой, и крайняя контактная точка появляется при достижении определенного значения безразмерной скорости, зависящего от меры эластичности. Кроме того, при скольжении микровыступа, форма которого соответствует трехгармонической модели, площадка его контакта с материалом при определенной скорости разделяется на две подобласти. На одном периоде такого микрорельефа имеются три локальных максимума контактного давления, значения которых увеличиваются и сдвигаются в сторону скольжения неровности с повышением скорости. Очевидно, что распределение контактных давлений над микровыступами, согласно выбранной модели микровыступа, соответствует решению контактной задачи с дополнительными пригрузками. Отметим, что при снижении высоты малых

инденторов решение задачи асимптотически приближается к решению для одиночного микровыступа.

Согласно данным рис. 5, при значениях меры эластичности 5; безразмерной длины грани 10; 20; 30; 50 значения максимума деформационной силы трения составляют соответственно 9,345; 18,693; 28,040; 46,724. При значениях безразмерной длины грани 20; меры эластичности 2; 5; 8; 12 значения максимума силы составляют 7,471; 18,693; 29,914; 44,876, соответственно. Расчеты демонстрируют, что при увеличении безразмерной скорости указанная сила изменяется немонотонно с достижением максимума.

Графики на рис 6, 7, 8 дополнительно подтверждают немонотонный характер влияния скорости скольжения на рассматриваемую силу трения и монотонный характер влияния меры эластичности и длины грани.

Анализ показывает, что наличие двух дополнительных малых неровностей на одном периоде, соответству-

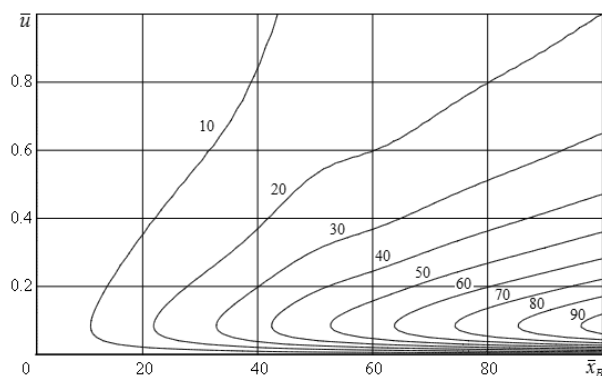


Рис. 7. Влияние безразмерных длины грани и скорости скольжения на безразмерную силу трения ( $e_{01} = 5$ )

Fig. 7. The impact of the dimensionless length of the edge and on the dimensionless sliding speed on the dimensionless friction force ( $e_{01} = 5$ )

ющее трехгармонической модели микровыступа, приводит к существенному снижению деформационной силы трения, по сравнению с силой, возникающей на одиночной неровности.

### Выводы

На основании проведенного исследования, можно обозначить следующие выводы.

1. Существенной особенностью процесса трения мышечной ткани охлажденной рыбы и шероховатой поверхности грани, форма которой включает три гармоники, является насыщенный контакт материала с неровностями при определенных значениях скорости резания и реологических параметров сырья. При этом явлении крайняя контактная точка отсутствует, поскольку материал контактирует с каждым микровыступом по всей его

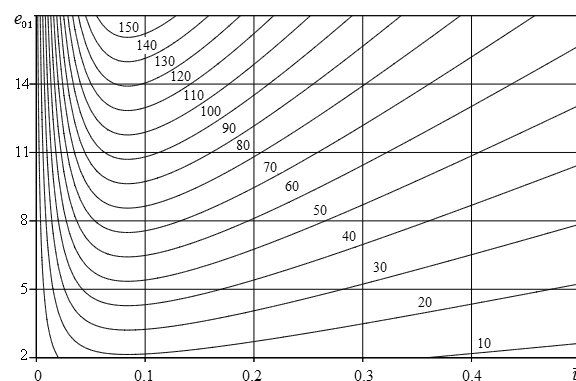


Рис. 8. Влияние безразмерных скорости скольжения и меры эластичности на безразмерную силу трения ( $\bar{x}_B = 50$ )

Fig. 8. The impact of the dimensionless sliding speed and the measure of material elasticity on the dimensionless friction force ( $\bar{x}_B = 50$ )

длине. В данном случае деформационная составляющая силы трения существенно снижается.

2. Безразмерная деформационная составляющая силы трения является немонотонной функцией безразмерной скорости скольжения. При скоростях скольжения, стремящихся к нулю или бесконечности, деформационная сила трения стремится к нулю. Это соответствует решению задачи для вдавливания микровыступов в материал с упругими свойствами. Величина силы существенно возрастает с ростом меры эластичности материала, которая, в свою очередь, существенно зависит от температуры рыбного сырья.

Дальнейшие исследования подразумевают изучение влияния параметров шероховатости на силу трения и определение коэффициента трения между материалом и гранями ножа.

### Литература

1. Spagnoli A., Brighenti R., Terzano M., Artoni F. Cutting resistance of soft materials: Effects of blade inclination and friction. // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2019. no. 101. pp. 200–206.
2. Xiao-Ping Zhou, Liang Fu, Wang Ju, Berto F. An experimental study of the mechanical and fracturing behavior in PMMA specimen containing multiple 3D embedded flaws under uniaxial compression. // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2019. no. 101. pp. 207–216.
3. Atkins T. Prediction of sticking and sliding lengths on the rake faces of tools using cutting forces. // International Journal of Mechanical Sciences. 2015. no. 91. pp. 33–45.
4. Atkins T. Optimum blade configurations for the cutting of soft solids. // Engineering Fracture Mechanics. 2006. no. 73. pp. 2523–2531.
5. Schuldt S., Schneider Y., Rohm H. High-speed cutting of foods: Cutting behavior and initial cutting forces. // Journal of Food Engineering. 2018. no. 230. pp. 55–62.
6. Belaasilia Y., Braikat B., Jamal M. High order mesh-free method for frictional contact. // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2017. no. 82. pp. 68–78.
7. Belaasilia Y., Timesli A., Braikat B., Jamal M. A numerical mesh-free model for elasto-plastic contact problems. // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2018. no. 94. pp. 103–112.

### References

1. Spagnoli A., Brighenti R., Terzano M., Artoni F. Cutting resistance of soft materials: Effects of blade inclination and friction. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2019, no. 101, pp. 200–206.
2. Xiao-Ping Zhou, Liang Fu, Wang Ju, Berto F. An experimental study of the mechanical and fracturing behavior in PMMA specimen containing multiple 3D embedded flaws under uniaxial compression. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2019, no. 101, pp. 207–216.
3. Atkins T. Prediction of sticking and sliding lengths on the rake faces of tools using cutting forces. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2015, no. 91, pp. 33–45.
4. Atkins T. Optimum blade configurations for the cutting of soft solids. *Engineering Fracture Mechanics*, 2006, no. 73, pp. 2523–2531.
5. Schuldt S., Schneider Y., Rohm H. High-speed cutting of foods: Cutting behavior and initial cutting forces. *Journal of Food Engineering*, 2018, no. 230, pp. 55–62.
6. Belaasilia Y., Braikat B., Jamal M. High order mesh-free method for frictional contact. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2017, no. 82, pp. 68–78.
7. Belaasilia Y., Timesli A., Braikat B., Jamal M. A numerical mesh-free model for elasto-plastic contact problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2018, no. 94, pp. 103–112.

8. Wang P., Ni H., Wang R., Li Zh., Wang Y. Experimental investigation of the effect of in-plane vibrations on friction for different materials. // *Tribology International*. 2016. no. 99. pp. 237–247.
9. Jadav P. U., Amali R., Adetoro O. B. Analytical friction model for sliding bodies with coupled longitudinal and transverse vibration. // *Tribology International*. 2018. no. 126. pp. 240–248.
10. Ageev O. V., Fatykhov J. A., Jakubowski M. Mathematical simulation of forces of normal contact pressure on the edges of double-edge knife during food materials cutting. // *Carpathian Journal of Food Science and Technology*. 2018. no. 10 (5). pp. 158–169.
11. Ageev O. B. Математическое моделирование силы сопротивления формы двухкромочного ножа без боковых граней при резании рыбы / О. В. Агеев, В. А. Наумов, Ю. А. Фатыхов, Н. В. Самойлова. // *Известия Калининградского государственного технического университета*. 2019. № 53. С. 75–88.
12. Ageev O. B. Выбор и идентификация реологической модели структурно-механических свойств мышечной ткани рыбы / О. В. Агеев, Ю. А. Фатыхов, Н. В. Самойлова // *Известия Калининградского государственного технического университета*. 2018. № 49. С. 75–91.
13. Ageev O. B. Анализ соответствия реологических моделей структурно-механическим свойствам рыбы / О. В. Агеев, В. А. Наумов, Ю. А. Фатыхов, Н. В. Самойлова // *Научный журнал НИУ ИТМО. Серия. Процессы и аппараты пищевых производств*. 2018. № 2 (36). С. 34–43. DOI 10.17586/2310-1164-2018-11-2-34-43.
14. Ageev O. B. Математическое моделирование сил нормального контактного давления на боковые грани ножа при резании пищевых материалов / О. В. Агеев, В. А. Наумов, Ю. А. Фатыхов // *Научный журнал НИУ ИТМО. Серия. Процессы и аппараты пищевых производств*. 2017. № 4. С. 27–42. DOI: 10.17586/2310-1164-2017-10-4-27-42.
15. Popov V. L. Contact Mechanics and Friction. Physical Principles and Applications. Berlin, Springer Verlag GmbH, 2017, 391 p.
16. Soldatenkov I. A. Расчет трения индентора с фрактальной шероховатостью о вязкоупругое основание. // *Трение и износ*. 2015. № 3. Т. 36. С. 257–262.
17. Soldatenkov I. A. К расчету деформационной составляющей силы трения для стандартного вязкоупругого основания. // *Трение и износ*. 2008. № 1. Т. 29. С. 12–21.
8. Wang P., Ni H., Wang R., Li Zh., Wang Y. Experimental investigation of the effect of in-plane vibrations on friction for different materials. *Tribology International*, 2016, no. 99, pp. 237–247.
9. Jadav P. U., Amali R., Adetoro O. B. Analytical friction model for sliding bodies with coupled longitudinal and transverse vibration. *Tribology International*, 2018, no. 126, pp. 240–248.
10. Ageev O. V., Fatykhov J. A., Jakubowski M. Mathematical simulation of forces of normal contact pressure on the edges of double-edge knife during food materials cutting. *Carpathian Journal of Food Science and Technology*, 2018, no. 10 (5), pp. 158–169.
11. Ageev O. V., Naumov V. A., Fatykhov Yu. A., Samojlova N. V. Mathematical simulation of profile resistance force of double-edged knife without side edges during fish cutting. *Izvestiya Kaliningradskogo gosudarstvennogo tehnikeskogo universiteta*, 2019, no. 53, pp. 75–88. (in Russian)
12. Ageev O. V., Fatykhov Yu. A., Samojlova N. V. Selection and identification of rheological model of the structural-mechanical properties of muscular fish tissue. *Izvestiya Kaliningradskogo gosudarstvennogo tehnikeskogo universiteta*, 2018, no. 49, pp. 75–91. (in Russian)
13. Ageev O. V., Naumov V. A., Fatykhov Yu. A., Samoilova N. V. Correspondence of rheological models to the structural-mechanical properties of fish. *Nauchnyy zhurnal NIU ITMO. Seriya: Processy i apparaty pishhevyh proizvodstv*, 2018, no. 2 (36), pp. 34–43. (in Russian)
14. Ageev O. V., Naumov V. A., Fatykhov Yu. A. Mathematical simulation of forces of normal contact pressure on side knife edges during cutting of food materials. *Nauchnyy zhurnal NIU ITMO. Seriya: Processy i apparaty pishhevyh proizvodstv*, 2017, no. 4 (34), pp. 27–42. (in Russian)
15. Popov V. L. Contact Mechanics and Friction. Physical Principles and Applications. Berlin, Springer Verlag GmbH, 2017, 391 p.
16. Soldatenkov I. A. Calculation of friction force for indenter with fractal roughness in sliding on viscoelastic foundation. *Trenie i iznos*, 2015, no. 3, vol. 36, pp. 257–262. (in Russian)
17. Soldatenkov I. A. On calculation of deformation component of friction force for standard viscoelastic foundation. *Trenie i iznos*, 2008, no. 1, vol. 29, pp. 12–21. (in Russian)

### Сведения об авторах

#### Агеев Олег Вячеславович

к. т. н., доцент, доцент кафедры пищевых и холодильных машин Калининградского государственного технического университета, 236022 Россия, Калининград, Советский пр-кт 1, oleg.ageev@klgtu.ru, ORCID ID: 0000-0003-3035-6238, РИНЦ ID: 511340.

#### Наумов Владимир Аркадьевич

д. т. н., профессор, заведующий кафедрой водных ресурсов и водопользования Калининградского государственного технического университета, 236022 Россия, Калининград, Советский пр-кт 1, van-old@rambler.ru

#### Фатыхов Юрий Адгамович

д. т. н., профессор, заведующий кафедрой пищевых и холодильных машин Калининградского государственного технического университета, 236022, Россия, Калининград, Советский пр. 1, elina@klgtu.ru

#### Самойлова Наталья Владимировна

аспирант кафедры пищевых и холодильных машин Калининградского государственного технического университета, 236022 Россия, Калининград, Советский пр. 1, procyon@mail.ru

### Information about authors

#### Ageev Oleg Viatcheslavovich

Ph. D., associate professor of the Department of Food and Refrigeration Machines of Kaliningrad State Technical University, 236022 Russia, Kaliningrad, Sovetskii av., 1, elina@klgtu.ru, ORCID ID: 0000-0003-3035-6238.

#### Naumov Vladimir Arkadievich

D. Sc., professor, chair of the Department of Water Resources and Water Management of Kaliningrad State Technical University, 236022 Russia, Kaliningrad, Sovetskii av., 1, van-old@rambler.ru

#### Fatykhov Yuriy Adgamovich

D. Sc., professor, chair of the Department of Food and Refrigeration Machines of Kaliningrad State Technical University, 236022, Russia, Kaliningrad, Sovetskii av., 1, elina@klgtu.ru

#### Samojlova Natalia Vladimirovna

Post-graduate student of the Department of Food and Refrigeration Machines of Kaliningrad State Technical University, 236022 Russia, Kaliningrad, Sovetskii av., 1, procyon@mail.ru