

УДК 621.5.041

Об угле обрезки спиралей компрессора. Аналитический подход

Канд. техн. наук В. А. КОСАЧЕВСКИЙ

vakos32@yandex.ru

Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского

Рассматриваются различные подходы к моделированию центральной части спирального компрессора, проводится их сравнительный анализ, исходя из принципа действия спиральной машины, используемой в различных вариантах. Анализируются схемы обрезки спиралей. Вводится и обосновывается понятие минимального критического угла обрезки спиралей. Предложен метод определения такого угла, основанный на рассмотрении уравнений образующих кривых рабочих органов спиральной машины. В заключение делается вывод о необходимости корректной оценки нижней границы угла обрезки спиралей при проектировании спиральных машин и предлагается использовать с этой целью изложенный метод.

Ключевые слова: спиральные компрессоры (СПК), спиральные машины, области применения СПК, геометрия спиральной машины, моделирование центральной части, угол обрезки спиралей, критерий минимального угла.

Информация о статье:

Поступила в редакцию 05.03.2020, принята к печати 24.04.2020

DOI: 10.17586/1606-4313-2020-19-2-26-30

Язык статьи — русский

Для цитирования:

Косачевский В. А. Об угле обрезки спиралей компрессора. Аналитический подход. // Вестник Международной академии холода. 2020. № 2. С. 26–30.

On the cut-off angle for the wraps of scroll compressors. An analytical approach

Ph. D. V. A. KOSACHEVSKY

vakos32@yandex.ru

Military space academy of A. F. Mozhaysky

The article analyzes different approaches to the modelling of scroll compressor central part. They are compared in terms of different operation principles used for scroll machines. The schemes of spiral cut-off are analyzed. The concept minimal critical angle for spiral cut-off is introduced and substantiated. The technique of the angle estimation, based on the equations for intrados of scroll machine working tool, is suggested. The relevance of correct estimation for the lower boundary of the cut-off angle for wraps in scroll machines designing is emphasized. The technique described is suggested for the purpose.

Keywords: scroll compressors, scroll machines, fields of application, scroll machine geometry, modeling of central part, scroll wraps conjugation, cut-off angle for wrap, minimum cut-off angle criterion.

Article info:

Received 05/03/2020, accepted 24/04/2020

DOI: 10.17586/1606-4313-2020-19-2-26-30

Article in Russian

For citation:

Kosachevsky V. A. On the cut-off angle for the wraps of scroll compressors. An analytical approach. *Vestnik Mezhdunarodnoi akademii kholoda*. 2020. No 2. p. 26-30.

Введение

В конце XX века, на мировом рынке появился новый тип компрессора — так называемый спиральный компрессор (СПК), получивший широчайшее распространение и поставивший ряд новых научно-технических задач, как в традиционной инженерной области, так и в области прикладной математики.

Принципы построения образующих спиралей компрессора активно обсуждались многими авторами. Рассматривались разные геометрические кривые, на основе которых возможно построение рабочих органов спирального компрессора. В настоящее время при проектировании спиральных машин самого различного назначения

используются лишь две геометрические спирали, так называемая эвольвента окружности и спираль Архимеда.

Автором данного исследования, в течение ряда лет разрабатывалась версия Архимедовой спирали, как простейшей с точки зрения математического описания, так и одной из кривых, наиболее просто получаемых в технике. Были получены основные соотношения и выражения, полностью определяющие контуры спиралей СПК, были разработаны профили сопряжений концов спиралей, решалась задача проектирования центральной части системы спиралей путем их сопряжения с помощью окружностей [1, 2]. Эта задача играет важную роль при проектировании спиральных компрессоров, поскольку от ее решения во многом зависит эффективность работы компрессора [3]. Тем не менее, при создании спиральных машин другого назначения, таких как вакуумные спиральные насосы и пневмомоторы [4]–[7], профилирование центральной части системы спиралей может пойти по другому пути, который не требует неперемного сопряжения концов спиралей; напротив, центральная часть спиралей может быть сформирована путем обрезки концов спиралей по полярному углу [8, 9], либо вырезана в виде круга достаточно большого радиуса [10]–[13]. Не следует, однако, полагать, что эта центральная часть может быть вырезана каким угодно способом без возможного ущерба для эффективной работы машины. Особенности способа обрезки концов спиралей по полярному лучу была посвящена первая, ранее опубликованная часть настоящей работы [14].

В этой части исследования используется другой способ оценки минимально возможного угла обрезки спиралей, исходя из рассмотрения уравнений соприкасающихся кривых.

Принцип действия СПК, как известно, сводится к взаимодействию двух спиральных рабочих элементов (рис. 1).

Подвижная спираль **B** развернута на 180° по отношению к неподвижной спирали **A**. Центры спиралей O и O' удалены друг от друга на расстояние ϵ . Спираль **B**, не вращаясь вокруг своего центра O' , принудительно совершает плоскопараллельное движение по орбите радиуса ϵ вокруг центра системы O по часовой стрелке (рис. 1).

Образующиеся, при таком орбитальном движении, парные замкнутые полости (рис. 2) смещаются к центру системы спиралей, уменьшаясь в объеме, и сжимают находящийся в них газ, выталкивая его в отводное отверстие в центре.

Положение спирали **B** на орбите определяется орбитальным углом θ , который изменяется от отрицательной полуоси Ox по часовой стрелке в положительном направлении, в то время как угол закрутки спирали ϕ изменяется от положительной части абсциссы, или, что то же самое, от полярной оси против часовой стрелки в положительном направлении (см. рис. 3).

Формулировка основных условий задачи

Очевидно, чтобы исключить заклинивание спиралей, их необходимо подрезать, убрав загнутые концы в центре. Вариант обрезки спиралей по полярному лучу ранее нами уже рассматривался [14]. В этой работе применяется другой подход к оценке минимального угла

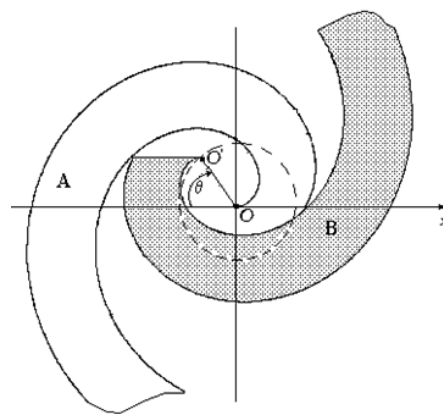


Рис. 1. Схема орбитального движения спиралей: **A** — неподвижная спираль; **B** — подвижная спираль; O — полюс; O' — начало подвижной спирали **B**; $OO' = \epsilon$ — радиус орбиты спирали **B**; θ — орбитальный угол
 Fig. 1. Orbital movement of the scrolls: **A** — stationary scroll; **B** — moving scroll; O — pole; O' — moving scroll beginning **B**; $OO' = \epsilon$ — scroll orbit radius **B**; θ — orbital angle

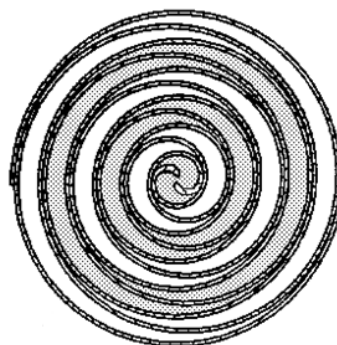


Рис. 2. Замкнутые полости в СПК. Момент окончания всасывания

Fig. 2. Closed cavities in scroll compressor. The end of suction

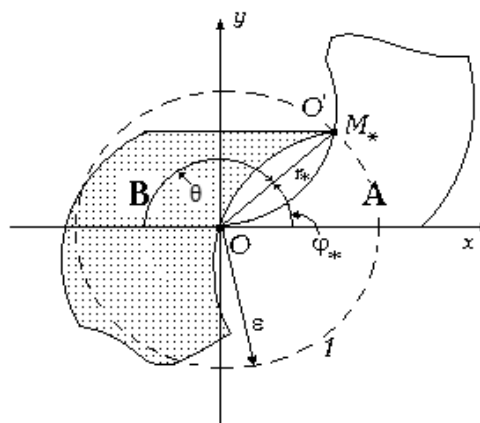


Рис. 3. Контакт концевых частей спиралей. **A**, **B** — неподвижная и подвижная спирали; O — полюс; O' — начало подвижной спирали; I — орбита вращения точки O' вокруг полюса, ее радиус ϵ ; M_* — точка контакта внутренних образующих; r_* , ϕ_* — ее полярные координаты; θ — орбитальный угол
 Fig. 3. Contact of the end parts of the scrolls. **A**, **B** — stationary and moving scrolls; O — pole; O' — the beginning of moving scroll; I — the orbit of point O' rotation around pole, its radius ϵ ; M_* — contact point of intrados; r_* , ϕ_* — its polar coordinates; θ — orbital angle

обрезки, основанный на аналитическом рассмотрении уравнений образующих кривых.

Уравнение Архимедовой спирали в полярных координатах имеет следующий вид:

$$r = r_0 \varphi, \quad (1)$$

где r — полярный радиус, измеряемый в линейных единицах; r_0 — шаг спирали Архимеда, также имеющий линейную размерность; φ — полярный угол (обычно измеряемый в радианах), отсчитываемый от полярной оси против часовой стрелки в положительном направлении.

Используя формулы перехода от декартовых координат к полярным, можем записать параметрические уравнения спирали Архимеда:

$$\left. \begin{aligned} x &= r_0 \varphi \cos \varphi; \\ y &= r_0 \varphi \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где r_0 и φ имеют тот же смысл. Если добавить к этим уравнениям орбитальное движение по окружности, получим такие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} x &= r_0 \varphi \cos \varphi + \varepsilon \cos \theta; \\ y &= r_0 \varphi \sin \varphi + \varepsilon \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где ε — радиус круговой орбиты; θ — орбитальный угол.

Возводя обе части соотношений (3) в квадрат, складывая их, получим:

$$x^2 + y^2 = r_0^2 \varphi^2 \cos^2 \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \theta + 2r_0 \varepsilon \varphi \cos \varphi \cos \theta + r_0^2 \varphi^2 \sin^2 \varphi + \varepsilon^2 \sin^2 \theta + 2r_0 \varepsilon \varphi \sin \varphi \sin \theta \quad (4)$$

Учитывая, что $x^2 + y^2 = r^2$, а также используя тригонометрические соотношения, перепишем выражение (4) в виде:

$$r^2 = r_0^2 \varphi^2 + \varepsilon^2 + 2r_0 \varepsilon \varphi \cos(\varphi - \theta). \quad (5)$$

Из равенства радиусов, учитывая выражения (1) и (4) следует:

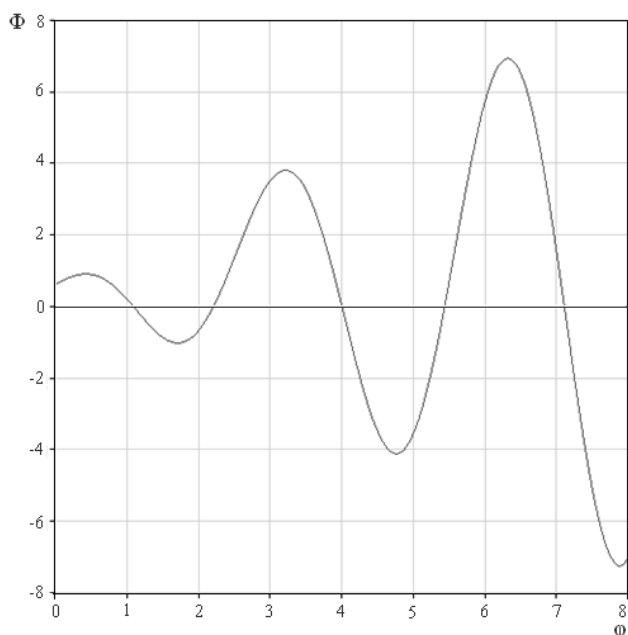


Рис. 4. Зависимость левой части уравнения (10) от полярного угла φ

Fig. 4. Dependence of the left part of equation (10) on polar angle φ

$$r_0^2 \varphi^2 = r_0^2 \varphi^2 + \varepsilon^2 + 2r_0 \varepsilon \varphi \cos(\varphi - \theta) \quad (6)$$

Отсюда, приводя подобные и сокращая на ε , получим:

$$\varphi \cos(\varphi - \theta) = \frac{\varepsilon}{2r_0} \quad (7)$$

Обратимся снова к рис. 3. Из него отчетливо видно, что луч, протянутый из полюса O к точке контакта M_* двух врезающихся друг в друга концов спиралей, с одной стороны образует с осью Ox полярный угол φ_* , а с другой — составляет угол θ с отрицательной полуосью Ox .

Отсюда следует простой, но важный вывод, что в момент контакта концевых частей спиралей орбитальный угол θ и полярный угол φ_* в сумме составляют π , а значит можно записать следующее выражение:

$$\theta = \pi - \varphi_* \quad (8)$$

Таким образом, выразив φ из (8), уравнение (7) перепишем следующим образом:

$$\varphi \cos(2\varphi - \pi) - \frac{\varepsilon}{2r_0} = 0 \quad (9)$$

Воспользовавшись тригонометрическими формулами для функций разности двух углов, получаем окончательно:

$$\varphi \cos(2\varphi) + \frac{\varepsilon}{2r_0} = 0 \quad (10)$$

Соотношение (10) представляет собой точное уравнение, решив которое, мы получим полярный угол φ^* , по которому можно обрезать спирали с целью избежать риска их заклинивания. Уравнение (10) относится к числу трансцендентных, поэтому здесь может идти речь лишь о численном решении.

Введем в рассмотрение функцию $\Phi(\varphi)$, описывающую левую часть уравнения (10):

$$\Phi = \varphi \cos(2\varphi) + \frac{\varepsilon}{2r_0} \quad (11)$$

Из уравнения (10) видно, что его левая часть есть функция периодическая, как показывает график на рис. 4. Решая уравнение (10), из-за периодичности мы получим целый ряд значений φ , из которых нас будет интересовать только одно, первое, ближайшее к оси ординат, поскольку его величина не должна превышать из общих соображений числа $\pi/2$ (полярный угол точки контакта спиралей должен лежать в первом квадранте). С точностью $\text{Erg} = 10^{-5}$ это значение, выраженное в радианной мере, будет равно 1,0918.

Оценим полученное решение. Вновь обратившись к рис. 3, заметим, что это решение будет соответствовать случаю, который рассматривался нами ранее (см. [14, 15]), когда полярный радиус точки контакта образующих будет равен радиусу орбиты подвижной спирали. Как уже было упомянуто в работе [14], в результате такой обрезки концы спиралей не будут контактировать вовсе (рис. 5), т.е. обрезка произведена с явным превышением минимально необходимого угла.

Таким образом, задача заключается в том, чтобы найти то минимальное значение угла обрезки спиралей, при котором заклинивание будет исключено, но концы спиралей будут, возможно, лишь виртуально касаться друг друга. Другими словами, нам необходимо найти минимум функции $\Phi(\varphi)$. Для этого воспользуемся стан-

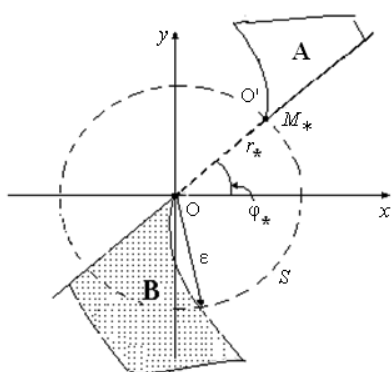


Рис. 5. Вид центральной части после обрезки при $\varphi_* = \varepsilon / r_0$

Fig. 5. Central part after cut-off at $\varphi_* = \varepsilon / r_0$

дартными методами математического анализа. Продифференцировав соотношение (11) и положив производную равной нулю, получим следующее уравнение:

$$\cos(2\varphi) - 2\varphi \sin 2\varphi = 0. \quad (12)$$

Как видим, производная $\Phi'(\varphi)$ также проявляет периодичность (см. рис. 6).

Выбираем из множества корней производной наименьший положительный, который доставляет минимум функции $\Phi(\varphi)$ в первом квадранте (см. рис. 6) и обозначим его φ_{cr} . Это и будет минимальный полярный угол обрезки, при котором все еще не будет зацепления и заклинивания спиралей. Его значение получаем, численно решая трансцендентное уравнение (11). Оно составит 0,4302, с точностью порядка $\text{Erg} = 10^{-5}$. Это значение критического минимального угла обрезки спиралей в принципе неплохо согласуется с результатами, полученными в [5], где этот угол оценивался из геометрических соображений и составлял 0,6279.

Заключение

Насколько известно, подобного анализа оценки минимально возможного критического значения полярного угла обрезки спиралей, исходящей не из эмпириче-

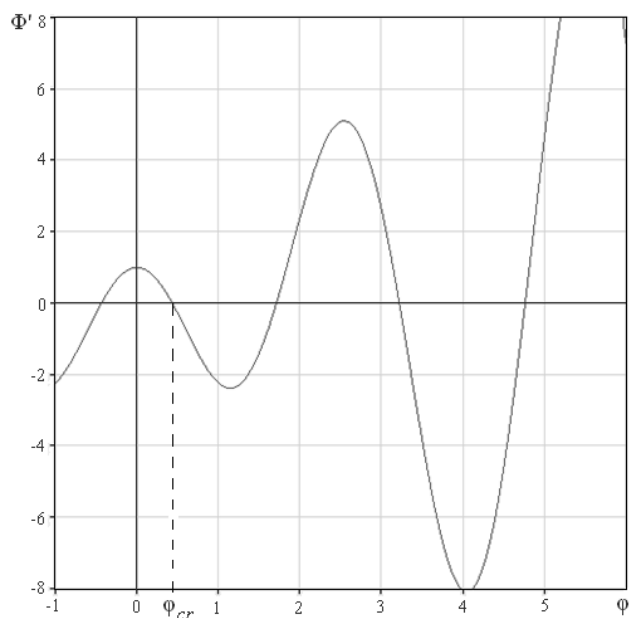


Рис. 6. Поведение производной $\Phi'(\varphi)$

Fig. 6. The curve for derivative $\Phi'(\varphi)$

ских подборок, а из строгих математических методов, до настоящего времени, исключая [14], не проводилось. Следует отметить, что предпринятый в данной работе аналитический подход отличается от подхода к этой проблеме, предпринятого в предыдущей работе [14]. Выдвинутые и обоснованные там соотношения, несмотря на безусловную их справедливость, носят в определенном смысле произвольный характер. Полученные в настоящей работе уравнения (10) и (11), их анализ представляют собой попытку обосновать абсолютно объективный критерий для обрезки спиралей по полярному лучу, определяющий минимально возможный угол такой обрезки, исходя из рассмотрения уравнений образующих кривых методами математического анализа. Введение такого минимального угла обрезки следует расценивать как одно из важных условий при проектировании спиральных машин с удаленной центральной частью.

Литература

1. Косачевский В. А. О геометрии рабочих элементов спирального компрессора // Компрессорная техника и пневматика. 1994. № 4–5, с. 49.
2. Косачевский В. А. О математической модели рабочего процесса спирального компрессора // Компрессорная техника и пневматика. 1997. № 1–2 (14–15), с. 40.
3. Косачевский В. А. О производительности спирального компрессора // Вестник Международной академии холода. 2016, № 4. с. 40–46.
4. Ивлев В. И., Мисюрин С. Ю. Расчетные и экспериментальные характеристики спиральной машины, работающей в режиме газового мотора // Доклады Академии наук. 2017. Т. 472, № 3, с. 278–281.
5. Orosz Matthew S., Mueller Amy V., Dechesne Bertrand J., Hemond Harold F. Geometric design of scroll expanders

References

1. Kosachevsky V. A. about the geometry of the working elements of a spiral compressor. *Compressor Equipment and Pneumatics*. 1994. no. 4–5, p. 49. (in Russian)
2. Kosachevsky V. A. on the mathematical model of the working process of a spiral compressor. *Compressor Equipment and Pneumatics*. 1997. no. 1–2 (14–15), p. 40. (in Russian)
3. Kosachevsky V. A. About the performance of a spiral compressor. *Vestnik Mezhdunarodnoi akademii kholoda*. 2016, No. 4. p. 40–46. (in Russian)
4. Ivlev V. I., Misyurin S. Yu. Calculation and experimental characteristics of a spiral machine operating in the gas motor mode. *Reports of the Academy of Sciences*. 2017. Vol. 472, no. 3, pp. 278–281. (in Russian)
5. Orosz Matthew S., Mueller Amy V., Dechesne Bertrand J., Hemond Harold F. Geometric design of scroll expanders opti-

- optimized for small organic Rankine cycles// *ASME Journal of engineering for gas turbines and power*, 135 (04), April 2013.
6. Accorsi Felipe A., James Nelson A., Groll Eckhard., Horton William T., Braun James E. Experimental Testing and Modeling of 5 kW Oil-Free Open Drive Scroll Expander Using R245fa// *Proc. ICEC at Purdue Univ.*, 2016, P. 2482.
 7. Hesse Jan, Andres Rainer. CFD Simulation of a Dry Scroll Vacuum Pump Including Leakage Flows// *Proc. ICEC at Purdue Univ.*, 2016, p. 11–14.
 8. Ефремов С. Н., Шестакович И. А. Термодинамический расчет спирального холодильного компрессора кондиционирования воздуха// *Вестник СевГТУ. Серия «Механика, энергетика, экология»*. 2006. Вып. 75. С. 154–158.
 9. Ефремов С. Н. Анализ перетечек хладагента в спиральных холодильных компрессорах // *Вестник СевГТУ. Серия «Механика, энергетика, экология»*. 2008. Вып. 87. С. 107–110.
 10. Ефремов С. Н., Шестакович И. А. Профильный расчет обрезающих спиралей холодильного компрессора // *Вестник СевГТУ. Серия «Механика, энергетика, экология»*. 2005. Вып. 67. С. 148–153.
 11. Gravesen J. & Henriksen C. The Geometry of the Scroll Compressor. // *Society for Industrial and Applied Mathematics*. 2001. Vol. 43, pp. 113–126.
 12. Bukac Hubert. The theory of scroll profile// *Proc. ICEC at Purdue Univ.*, 2006, p. 1747.
 13. Bell I., Groll E. A., Braun J. E., King G. Update on scroll compressor chamber geometry// *Proc. ICEC at Purdue Univ.* 2010. July 12–15. p. 1. 1489.
 14. Косачевский В. А. Об угле обрезки спиралей компрессора // *Вестник Международной академии холода*. 2019. № 4, с. 37–41.
 15. Косачевский В. А. О моделировании центральной области спирального компрессора // *Вестник Международной академии холода*. 2018. № 3, с. 49–52.
 6. Accorsi Felipe A., James Nelson A., Groll Eckhard., Horton William T., Braun James E. Experimental Testing and Modeling of 5 kW Oil-Free Open Drive Scroll Expander Using R245fa. *Proc. ICEC at Purdue Univ.*, 2016, P. 2482.
 7. Hesse Jan, Andres Rainer. CFD Simulation of a Dry Scroll Vacuum Pump Including Leakage Flows. *Proc. ICEC at Purdue Univ.*, 2016, p. 11–14.
 8. Efremov S. N., Shestakovich I. A. Thermodynamic calculation of a spiral refrigerating air conditioning compressor. *Bulletin SevGTU. Series «Mechanics, energy, ecology»*. 2006. Issue 75. Pp. 154–158. (in Russian)
 9. Efremov S. N. The analysis of the leakages of the refrigerant in the scroll refrigeration compressors. *Bulletin SevGTU. Series «Mechanics, energy, ecology»*. 2008. Issue 87. Pp. 107–110. (in Russian)
 10. Efremov S. N., Shestakovich I. A. Profile calculation of forming coils of a refrigerating compressor. *Bulletin SevGTU. Series «Mechanics, energy, ecology»*. 2005. Issue 67. Pp. 148–153. (in Russian)
 11. Gravesen J. & Henriksen C. The Geometry of the Scroll Compressor. *Society for Industrial and Applied Mathematics*. 2001. Vol. 43, pp. 113–126.
 12. Bukac Hubert. The theory of scroll profile. *Proc. ICEC at Purdue Univ.*, 2006, p. 1747.
 13. Bell I., Groll E. A., Braun J. E., King G. Update on scroll compressor chamber geometry. *Proc. ICEC at Purdue Univ.* 2010. July 12–15. p. 1. 1489.
 14. Kosachevsky V. A. On the cut-off angle for the scroll compressor wrap. *Vestnik Mezhdunarodnoi akademii kholoda*. 2019. No 4. p. 37–41. (in Russian)
 15. Kosachevsky V. A. Modelling the central part of the scroll compressors. *Vestnik Mezhdunarodnoi akademii kholoda*. 2018. No 3. p. 45–52. (in Russian)

Сведения об авторе

Косачевский Валерий Аркадьевич

к.т. н., доцент кафедры математики Военно-космической академии им. А. Ф. Можайского, 197198, Санкт-Петербург, ул. Ждановская, 13, vakos32@yandex.ru

Information about author

Kosachevsky Valery A.

Ph.D., associate Professor of Department of mathematics of Military space academy of A. F. Mozhaysky, 197198, Russia, St. Petersburg, Zhdanovskaya str., 13, vakos32@yandex.ru



10-я Международная выставка «UzStroyExpo – Строительство, системы отопления и вентиляции»

21-21 октября 2020 г.

Основные разделы выставки:

- Строительство, строительная техника и оборудование;
- Строительные материалы;
- Отопление и вентиляция;
- Водоснабжение, водоочистка, сантехника.

Место проведения:

НБК «УзЭкспоЦентр», Узбекистан, г. Ташкент
www.ieg.uz

Менеджер проекта:

Ольга Сокольникова
E-mail: sales3@ieg.uz, prod@ieguzexpo.com