УДК 536.2

Стационарное температурное поле в прямоугольной пластине с переменной теплопроводностью по одной координате

Канд. техн. наук **А. И. КАНАРЕЙКИН**
kanareykins@mail.ru
Российский государственный геологоразведочный университет имени Серго Орджоникидзе (МГРИ)

Работа посвящена вопросам стационарного теплопереноса. В статье приведено решение распределения температурного поля в прямоугольной пластине. Что приводит к тому, что задача является двумерной. При этом задается закон изменения теплопроводности по одной из координат. Из-за чего сама задача является несимметричной и нелинейной. Что усложняет сам процесс решения. Теплообмен на двух противоположных концах пластины происходит при граничных условиях третьего рода, на остальных двух теплообмена нет. Решение находилось с помощью разложения в функциональный ряд. В результате получено аналитическое выражение распределения температуры пластины в виде ряда Фурье, содержащего модифицированные функции Бесселя нулевого порядка. Также в работе были рассмотрены частные случаи, когда граничные условия на стенках одинаковые и когда отсутствует подвод тепла. Частные случаи были интерпретированы физически. Один из частных случаев приводит поставленную задачу к задаче с граничными условиями третьего рода, что говорит о достоверности полученных результатов.

Ключевые слова: прямоугольная пластина, стационарная теплопроводность, двумерное дифференциальное уравнение теплопроводности, температура, ряд Фурье, метод разделения переменных, функции Бесселя, граничные условия третьего рода.

Информация о статье:
Поступила в редакцию 03.10.2022, одобрена после рецензирования 22.12.2022, принята к печати 13.01.2023
DOI: 10.17586/1606-4313-2023-22-1-99-104
Язык статьи — русский
Для цитирования:
Канарейкин А. И. Стационарное температурное поле в прямоугольной пластине с переменной теплопроводностью по одной координате. // Вестник Международной академии холода. 2023. № 1. С. 99–104. DOI: 10.17586/1606-4313-2023-22-1-99-104

Stationary temperature field in a rectangular plate with variable thermal conductivity in one coordinate

Ph. D. **A. I. KANAREYKIN**
kanareykins@mail.ru
Russian State Geological University named after Sergo Ordzhonikidze (MGRI)

The work is devoted to the issues of stationary heat transfer. The article presents a solution for the distribution of the temperature field in a rectangular plate, which leads to the fact that the problem is two-dimensional. In this case, the law of change of thermal conductivity along one of the coordinates is set. Therefore, the problem itself is asymmetric and nonlinear, which complicates the decision process itself. Heat exchange at the opposite ends of the plate surface occurs under boundary conditions of the third kind, there is no heat exchange at the other two ends. The solution was found by decomposition into a functional series. As a result, an analytical expression of the plate temperature distribution in the form of a Fourier series containing modified Bessel functions of the zero row is obtained. The paper also considered special cases when the boundary conditions on the walls are the same and when there is no heat supply. Special cases were interpreted physically. One of the special cases leads the problem to a problem with boundary conditions of the third kind, which indicates the reliability of the results obtained.

Keywords: rectangular plate, stationary thermal conductivity, two-dimensional differential equation of thermal conductivity, temperature, Fourier series, method of dividing variables, Bessel functions, boundary conditions of the third kind.

Article info:
Received 03/10/2022, approved after reviewing 22/12/2022, accepted 13/01/2023
DOI: 10.17586/1606-4313-2023-22-1-99-104
Article in Russian
For citation:
Kanareykin A. I. Stationary temperature field in a rectangular plate with variable thermal conductivity in one coordinate. *Journal of International Academy of Refrigeration.* 2023. No 1. p. 99–104. DOI: 10.17586/1606-4313-2023-22-1-99-104

Введение

Теория тепло- и массообмена представляет собой один из важнейших разделов физики. Вопросы тепло- и массообмена в инженерных разработках занимали и будут приобретать все большее значение поскольку решение многих задач промышленности неразрывно связано с теорией теплообмена.

В системах отопления, вентиляции в холодильной технике большую часть оборудования занимают теплообменные аппараты различных видов. Повышение энергетической эффективности и компактности теплообменных аппаратов тесно связано с интенсификацией процессов теплообмена [1]. Этому посвящено множество работ.

Отдельно можно выделить двумерные задачи теплопроводности [2]–[6]. Подобные задачи обычно возникают при описании процессов теплопередачи в тонких пластинах. Такие процессы, например, встречаются в холодильных установках. При этом существуют различные методы решения подобных задач. Для их решения существуют аналитические методы, однако решение некоторых неоднородных и нелинейных задач теплопроводности получить аналитическими методами не представляется возможным. Решение такого рода задач проводится с использованием численных методов. [7]–[12].

Актуальность данной статьи заключается в том, что полученные результаты работы могут быть применимыми для инженерных вычислений.

Целью данной работы является нахождение уравнения, описывающее температурное поле прямоугольной пластины с заданными граничными условиями второго и третьего рода. Задачами исследования был обзор работ в данной области, а также изучение и применение одного из методов решения подобных задач.

Научная новизна исследования заключается в том, что в нем рассмотрены как разные граничные условия, так и непостоянство коэффициента теплопроводности одновременно. В то время как большинство авторов в допущении принимают коэффициент теплопроводности за константу.

В работе рассмотрен случай с линейным изменением теплопроводности по одной координате с заданными граничными условиями второго и третьего рода. Случаю теплообмена при наличии граничных условий второго рода посвящено несколько работ [13]–[15]. Решение такого рода задач может быть связано с некоторыми трудностями. Автором [13]–[15], с помощью применения методов разделения переменных и разложения в ряд Фурье, была решена нелинейная задача распределения температуры в ограниченной пластине при граничных условиях второго и третьего рода. При этом коэффициент теплопроводности меняется линейно по одной координате. В результате чего было получено решение поставленной задачи в виде ряда Фурье, содержащего модифицированные функции Бесселя нулевого порядка

Постановка задачи

Рассмотрим однородную пластину с заданными размерами (рис. 1). При этом ее толщина значительно меньше длины и ширины. При этом теплообмен на двух противоположных концах пластины происходит при α=const, на двух других теплообмена нет. Необходимо найти закон распределения температурного поля в пластине при заданных краевых условиях.

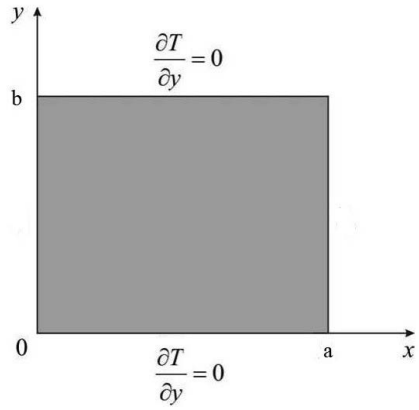

Рис. 1. Прямоугольная пластина с двумя адиабатическими границами

Fig. 1. Rectangular plate with two adiabatic boundaries

Основной задачей данной работы является нахождение распределения температуры в прямоугольной пластине со сторонами *a* и *b* с учетом изменения теплопроводности только по одной координате (по оси *x*). Для нахождения решения поставленной задачи, необходимо решить двумерное дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0. \tag{1}$$

В случае изменения теплопроводности по одной из координат уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0. \tag{2}$$

При этом нелинейное уравнение (2) должно удовлетворять следующим граничным условиям: на двух противоположных концах теплообмен отсутствует

$$\frac{\partial T(x,0)}{\partial y}=0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial T(x,b)}{\partial y}=0, \tag{4}$$

а на остальных теплообмен осуществляется за счет конвекции, подчиняющегося закону Ньютона и к ним еще подводится тепло, которое является функцией от координаты *y*

$$-\lambda\frac{\partial T(0,y)}{\partial x}+\alpha_1 T(0,y)=q_1(y); \tag{5}$$

$$-\lambda\frac{\partial T(a,y)}{\partial x}+\alpha_2 T(a,y)=q_2(y), \tag{6}$$

где α_1 и α_2 — заданные коэффициенты теплоотдачи; q_1 и q_2 — плотности тепловых потоков.

Решение задачи

Пусть коэффициент теплопроводности λ линейно зависит от координаты x следующим образом

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 x, \tag{7}$$

где λ_0 и λ_1 — некие постоянные.

Без ограничения общности принимается, что $\lambda_1 > 0$.

Введем новую переменную

$$\rho = x + x_0, \tag{8}$$

где

$$x_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}. \tag{9}$$

Тогда функциональную зависимость теплопроводности можно представить в виде

$$\lambda = \lambda_1 \rho. \tag{10}$$

В этом случае уравнение теплопроводности (2) перепишется следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial T}{\partial\rho}\right) + \rho\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \tag{11}$$

а граничные условия (4, 5) примут следующий вид:

$$-\lambda_1 x_0 \frac{\partial T(x_0, y)}{\partial\rho} + \alpha_1 T(x_0, y) = q_1(y); \tag{12}$$

$$\begin{gathered} -\lambda_1 (x_0 + a)\frac{\partial T(x_0 + a, y)}{\partial x} + \\ +\alpha_2 T(x_0 + a, y) = q_2(y). \end{gathered} \tag{13}$$

Решение задачи (11), (12) и (13) ищем в виде функционального ряда:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\rho)\cos\frac{n\pi y}{b}. \tag{14}$$

Подставим это решение в уравнение (11) и после разделения переменных получим следующее выражение

$$\begin{gathered} \frac{d^2 T_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dT_n}{d\rho} - \frac{n^2\pi^2}{b^2}T_n = 0, \\ n = 0, 1, 2, ..., \infty. \end{gathered} \tag{15}$$

Его решением является [16]

$$\begin{gathered} T_n = A_n I_0\left(\frac{n\pi\rho}{b}\right) + B_n K_0\left(\frac{n\pi\rho}{b}\right), \\ n = 0, 1, 2, ..., \infty. \end{gathered} \tag{16}$$

где $I_0\left(\frac{n\pi\rho}{b}\right)$ и $K_0\left(\frac{n\pi\rho}{b}\right)$ — модифицированные функции Бесселя нулевого порядка.

При n=0 уравнение (15) примет вид

$$\frac{d^2 T}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dT}{d\rho} = 0. \tag{17}$$

Для нахождения решения уравнения (17) введем новую переменную

$$\frac{dT}{d\rho} = U, \tag{18}$$

тогда

$$\frac{d^2 T}{d\rho^2} = \frac{dU}{d\rho}. \tag{19}$$

Тогда перепишем уравнение (17) в виде

$$\frac{dU}{d\rho} + \frac{U}{\rho} = 0. \tag{20}$$

Далее разделим переменные

$$\frac{dU}{U} = -\frac{d\rho}{\rho}$$

и проинтегрируем

$$U = \frac{B_0}{\rho}. \tag{21}$$

Далее вернемся к исходной замене переменной

$$\frac{dT}{d\rho} = \frac{B_0}{\rho}. \tag{22}$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим решение уравнения (17) в следующем виде

$$T_0 = A_0 + B_0 \ln\rho. \tag{23}$$

Для получения граничных условий разложим функции $q_1(y)$ и $q_2(y)$ в ряд Фурье

$$q_1(y) = \sum_{n=0}^{\infty} q_{1n}\cos\frac{n\pi y}{b}; \tag{24}$$

$$q_2(y) = \sum_{n=0}^{\infty} q_{2n}\cos\frac{n\pi y}{b}. \tag{25}$$

В свою очередь коэффициенты Фурье q_{1n} и q_{2n} определяются следующим образом

$$q_{1n} = \frac{2}{b}\int_0^b q_1(y)\cos\frac{n\pi y}{b}dy; \tag{26}$$

$$q_{2n} = \frac{2}{b}\int_0^b q_2(y)\cos\frac{n\pi y}{b}dy. \tag{27}$$

При n=0 мы имеем

$$q_{10} = \frac{1}{b}\int_0^b q_1(y)dy; \tag{28}$$

$$q_{20} = \frac{1}{b}\int_0^b q_2(y)dy. \tag{29}$$

После подстановки уравнений (14) и (24) в выражение (12) граничные условия для функций T_n запишутся в виде:

$$-\lambda_1 x_0 \frac{dT_n(x_0)}{d\rho} + \alpha_1 T_n(x_0) = q_{1n}; \tag{30}$$

$$-\lambda_1 (x_0 + a)\frac{dT_n(x_0 + a)}{d\rho} + \alpha_2 T(x_0 + a) = q_{2n}. \tag{31}$$

Сначала определим коэффициенты A_0 и B_0. Для этого подставим (13) в (30) и (31). Получим систему из двух уравнений

$$-\lambda_1 B_0 + \alpha_1 (A_0 + B_0 \ln x_0) = q_{10}; \quad (32)$$

$$-\lambda_1 B_0 + \alpha_2 [A_0 + B_0 \ln(x_0 + a)] = q_{20}, \quad (33)$$

откуда

$$A_0 = \frac{\left[\alpha_2 \ln(x_0 + a) - \lambda_1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right] q_{10} + (\lambda_1 - \alpha_1 \ln x_0) q_{20}}{\alpha_1 \alpha_2 \ln\left(1 + \frac{a}{x_0}\right)}; \quad (34)$$

$$B_0 = \frac{\alpha_1 q_{20} - \alpha_2 q_{10}}{\alpha_1 \alpha_2 \ln\left(1 + \frac{a}{x_0}\right)}. \quad (35)$$

Для определения неизвестных коэффициентов A_n и B_n необходимо будет решить следующую систему уравнений

$$\left[\alpha_1 I_0\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) - \lambda_1 \frac{n\pi x_0}{b} I_1\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right)\right] A_n + \left[\alpha_1 K_0\left(\frac{n\pi \text{Á}}{b}\right) + \lambda_1 \frac{n\pi x_0}{b} K_1\left(\frac{n\,\text{рр}}{b}\right)\right] B_n = q_{10}; \quad (36)$$

$$\left[\alpha_1 I_0\left(\frac{n\pi(x_0 + a)}{b}\right) + \lambda_1 \frac{n\pi x_0}{b} I_1\left(\frac{n\pi(x_0 + a)}{b}\right)\right] + \left[\begin{array}{l} \alpha_1 K_0\left(\frac{n\pi(x_0 + a)}{b}\right) - \\ -\lambda_1 \frac{n\pi(x_0 + a)}{b} K_1\left(\frac{n\pi(x_0 + a)}{b}\right) \end{array}\right] B_n = q_{2n}. \quad (37)$$

Решение полученной системы находим по формулам Крамера

$$A_n = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad (38)$$

$$B_n = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (39)$$

где

$$\Delta = \left[\begin{array}{l} I_0\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) K_0\left(\frac{n\pi(x_0 + a)}{b}\right) - \\ -K_0\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) I_1\left(\frac{n\pi(x_0 + a)}{b}\right) \end{array}\right] \alpha_1^2 - \left\{\frac{n\pi x_0}{b}\left[\begin{array}{l} I_1\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) K_0\left(\frac{n\pi(x_0 + a)}{b}\right) + \\ +K_1\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) I_0\left(\frac{n\pi(x_0 + a)}{b}\right) \end{array}\right] + \frac{n\pi(x_0 + a)}{b}\left[\begin{array}{l} I_0\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) K_1\left(\frac{n\pi(x_0 + a)}{b}\right) + \\ +K_0\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) I_1\left(\frac{n\pi(x_0 + a)}{b}\right) \end{array}\right]\right\} \alpha_1 \lambda_1 + \left[\begin{array}{l} I_1\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) K_1\left(\frac{n\pi(x_0 + a)}{b}\right) - \\ -K_1\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) I_1\left(\frac{n\pi(x_0 + a)}{b}\right) \end{array}\right] \lambda_1^2 \frac{n\pi x_0}{b} \frac{n\pi(x_0 + a)}{b}. \quad (40)$$

$$\Delta_1 = \left[\begin{array}{l} \alpha_1 K_0\left(\frac{n\pi(x_0 + a)}{b}\right) - \\ -\lambda_1 \frac{n\pi(x_0 + a)}{b} K_1\left(\frac{n\pi(x_0 + a)}{b}\right) \end{array}\right] q_{1n} - \left[\alpha_1 K_0\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) + \lambda_1 \frac{n\pi x_0}{b} K_1\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right)\right] q_{2n}. \quad (41)$$

$$\Delta_2 = -\left[\begin{array}{l} \alpha_1 I_0\left(\frac{n\pi(x_0 + a)}{b}\right) + \\ +\lambda_1 \frac{n\pi(x_0 + a)}{b} I_1\left(\frac{n\pi(x_0 + a)}{b}\right) \end{array}\right] q_{1n} + \left[\alpha_1 I_0\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) - \lambda_1 \frac{n\pi x_0}{b} I_1\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right)\right] q_{2n}. \quad (42)$$

Анализ полученного решения

Проведем исследование полученного результата для двух частных случаев. Пусть граничные условия слева и справа одинаковые. В этом случае B_0=0, а коэффициент A_0 будет равен

$$A_0 = \frac{q}{\alpha}, \quad (43)$$

тогда выражение (14) примет следующий вид

$$T = T_0 = A_0 = \frac{q}{\alpha}. \quad (44)$$

Это означает, что температурное поле пластины постоянна, т. е. не зависит от координаты и определяется уравнением Ньютона — Рихмана.

Во втором случае нет подвода теплоты, тогда выражение (14) примет иной вид

$$T = 0. \quad (45)$$

В этом случае подвода теплоты нет, поэтому температура пластины равна нулю, что и следовало ожидать.

Выводы

1. В настоящей работе была решена задача о нахождения температурного поля в прямоугольной пластине с заданным линейным изменением теплопроводности по одной из координат при адиабатически изолированных противоположных границах и при заданных граничных условиях третьего рода на двух других.

2. Было получено аналитическое выражение для нахождения температурного поля пластины в виде ряда, содержащего модифицированные функции Бесселя нулевого порядка. Также были рассмотрены частные случаи. Для этого полученное решение было исследовано при одинаковых значениях граничных условиях. Достоверность результатов подтверждается тем, что один из частных случаев приводит поставленную задачу к задаче с граничными условиями третьего рода.

3. Полученный результат позволяет решить большой класс задач не только при линейном изменении теплопроводности, но и при заданном изменении теплового потока на концах пластины. Он может быть полезен для расчетов холодильного оборудования. Также полученное решение иллюстрирует применение математического аппарата Берса к решению задачи теплопроводности.

Литература

1. *Карташов Э. М., Кудинов А.* Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений. М.: Ленанд, 2018. 1072 с.
2. *Мищенко А. В.* Стационарное температурное поле в многослойных стержнях с разрывами ширины сечения // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. № 1 (124). С. 12–21.
3. *Yankovskii A. P.* Refined modeling of flexural deformation of layered plates with a regular structure made from nonlinear hereditary materials // Mechanics of Composite Materials. 2018. Vol. 53. No. 6. Pp. 705–724. DOI: 10.1007/s11029-018-9697-9.
4. *Геренштейн А. В., Бездетнов А. Л.* Температурное поле неоднородного стержня // Сервис технических систем — основа безопасного функционирования машин и оборудования предприятий АПК: Материалы МНПК института агроинженерии, Челябинск, 15–17 февраля 2018. Троицк: Южно-Уральский государственный аграрный университет, 2018. С. 102–108.
5. *Мищенко А. В.* Моделирование двумерных температурных полей в структурно-неоднородных стержнях с разрывными геометрическими параметрами // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2018. № 1 (709). С. 5–15. DOI: 10.32683/0556-1052-2018-709-1-5-15.
6. *Шит М. Л., Пацюк В. И., Журавлев А. А., Бурчу В. И., Тимченко Д. В.* Управление теплообменным аппаратом с переменной площадью поверхности теплообмена // Проблемы региональной энергетики. 2019. № 1 (39).
7. *Геренштейн А. В., Машрабов Н., Королькова Л. И., Геренштейн Е. А.* Дифференциально-разностный метод для третьей смешанной задачи одномерной теплопроводности с непостоянными коэффициентами. // В сборнике: Актуальные вопросы агроинженерных наук в сфере технического сервиса машин, оборудования и безопасности жизнедеятельности: теория и практика. Материалы национальной научной конференции Института агроинженерии. Под редакцией С. А. Гриценко. 2020. С. 82–91.
8. *Иванов Д. Ю.* Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы области в случае двумерных задач нестационарной теплопроводности с граничными условиями второго и третьего рода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 57. С. 5–25. DOI: 10.17223/19988621/57/1.
9. *Котова Е. В., Еремин А. В., Кудинов В. А. и др.* Метод дополнительных искомых функций в задачах теплопроводности с переменными физическими свойствами среды // Вестник ИГЭУ. 2019. № 2. С. 59–70.
10. *Nolasco C., Jacome N. J., Hurtado-Lugo N. A.* Solution by numerical methods of the heat equation in engineering applications. A case of study: Cooling without the use of electricity // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1388: 012034. 7 p. DOI: 10.1088/1742–6596/1388/1/012034.
11. *Zhang Y., Zhang X., Li M. et al.* Research on heat transfer enhancement and flow characteristic of heat exchange surface in cosine style runner // Heat and Mass Transfer. 2019. no. 55. pp. 3117–3131. DOI: 10.1007/s00231-019-02647-5.
12. *Садыков А. В.* Расчет двумерного температурного поля в цилиндрической камере // Бюллетень науки и практики. 2018. Т. 4. № 12. С. 24–34.
13. *Канарейкин А. И.* Охлаждение бесконечной прямоугольной пластины с адиабатически изолированной стороной при граничных условиях третьего рода // Вестник Междуна-

References

1. Kartashov E. M., Kudinov A. Analytical methods of the theory of thermal conductivity and its applications. Moscow: Lenand. 2018. 1072 p. (in Russian)
2. Mishchenko A. V. Stationary temperature field in multilayer rods with section width discontinuities. *Bulletin of MGSU.* 2019. Vol. 14. No. 1 (124). pp. 12–21. (in Russian)
3. Yankovskii A. P. Refined modeling of flexural deformation of layered plates with a regular structure made from nonlinear hereditary materials. *Mechanics of Composite Materials.* 2018. Vol. 53. No. 6. Pp. 705–724. DOI: 10.1007/s11029-018-9697-9.
4. Gerenstein A. V., Bezdetnov A. L. Temperature field of an inhomogeneous rod. *Service of technical systems is the basis for the safe functioning of machinery and equipment of agricultural enterprises*: mat. International Scientific and Practical conf. Institute of Agricultural Engineering, Chelyabinsk, February 15–17, 2018. Troitsk: South Ural State Agrarian University, 2018. pp. 102–108. (in Russian)
5. Mishchenko A. V. Modeling of two-dimensional temperature fields in structurally inhomogeneous rods with discontinuous geometric parameters. *Izvestia of Higher educational institutions. Construction.* 2018. № 1 (709). C. 5–15. DOI: 10. 32683/0556-1052-2018-709-1-5-15. (in Russian)
6. Sheet M. L., Patsyuk V. I., Zhuravlev A. A., Burchu V. I., Timchenko D. V. Control of a heat exchanger with a variable heat exchange surface area. *Problems of regional energy.* 2019. No. 1 (39). (in Russian)
7. Gerenstein A. V., Mashrabov N., Korolkova L. I., Gerenstein E. A. Differential-difference method for the third mixed problem of one-dimensional thermal conductivity with non-constant coefficients. In the collection: *Actual issues of agroengineering sciences in the field of technical service of machinery, equipment and life safety: theory and practice.* Materials of the national scientific conference of the Institute of Agroengineering. Edited by S. A. Gritsenko. 2020. pp. 82–91. (in Russian)
8. Ivanov D. Y. Refinement of the collocation method of boundary elements near the boundary of the domain in the case of two-dimensional problems of unsteady thermal conductivity with boundary conditions of the second and third kind. *Bulletin of Tomsk State University. Mathematics and mechanics.* 2019. No. 57. pp. 5–25. DOI: 10.17223/19988621/57/1. (in Russian)
9. Kotova E. V., Eremin A. V., Kudinov V. A. et al. The method of additional desired functions in heat conduction problems with variable physical properties of the medium. *Bulletin of IGEU.* 2019. Issue 2. pp. 59–70. (in Russian)
10. Nolasco C., Jacome N. J., Hurtado-Lugo N. A. Solution by numerical methods of the heat equation in engineering applications. A case of study: Cooling without the use of electricity. *Journal of Physics: Conference Series.* 2019. V. 1388: 012034. 7 p. DOI: 10.1088/1742–6596/1388/1/012034.
11. Zhang Y., Zhang X., Li M. et al. Research on heat transfer enhancement and flow characteristic of heat exchange surface in cosine style runner. *Heat and Mass Transfer.* 2019. no. 55. pp. 3117–3131. DOI: 10.1007/s00231-019-02647-5.
12 Sadykov A. V. Calculation of a two-dimensional temperature field in a cylindrical chamber. *Bulletin of Science and practice.* 2018. Vol. 4. No. 12. pp. 24–34. (in Russian)
13. Kanareykin A. I. Cooling infinite rectangular plate with adiabatically isolated side wall under boundary conditions of the third kind. *Journal of International Academy of*

родной академии холода. 2022. № 3. С 74–79. DOI: 10.17586/1606-4313-2022-21-3-74-79
14. *Канарейкин А. И.* Распределение температуры в теле эллиптического сечения с внутренним источником тепла при адиабатической изоляции половины поверхности // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. 2021. № 5. С. 20–25.
15. *Kanareykin A.* Temperature distribution in an elliptical body with an internal heat source with partial adiabatic isolation, E3S Web of Conferences. 2021. Vol. 258. 09071. https://doi.org/10.1051/e3sconf/202125809071.
16. *Канарейкин А. И.* Применение математического аппарата Берса к решению задачи теплопроводности // Научные труды Калужского государственного университета имени К. Э. Циолковского. Серия: «Естественные науки». 2018. С. 175–178.

Refrigeration. 2022. No 3. p. 74–79. DOI: 10.17586/1606-4313-2022-21-3-74-79. (in Russian)
14. Kanareykin A. I. Temperature distribution in an elliptical cross-section body with an internal heat source with adiabatic insulation of half of the surface. *Forging and stamping production. Processing of materials by pressure.* 2021. No. 5. pp. 20–25. (in Russian)
15. Kanareykin A. Temperature distribution in an elliptical body with an internal heat source with partial adiabatic isolation, E3S Web of Conferences. 2021. Vol. 258. 09071. https://doi.org/10.1051/e3sconf/202125809071.
16. Kanareykin A. I. Application of the mathematical apparatus of Bers to the solution of the problem of thermal conductivity. *Scientific works of Kaluga State University named after K. E. Tsiolkovsky. Ser. «Natural Sciences».* 2018. pp. 175–178. (in Russian)

Сведения об авторе

Канарейкин Александр Иванович
К. т. н., доцент кафедры общей физики, Российский государственный геологоразведочный университет имени Серго Орджоникидзе (МГРИ), 117997, Москва ул. Миклухо-Маклая, 23, kanareykins@mail.ru,
ORCID: 0000-0001-9108-7495

Information about author

Kanareykin Alexander I.
Ph. D., Associate Professor of the Department of General Physics, Sergo Ordzhonikidze Russian State Geological Exploration University, Miklouho-Maclay St. 23., Moscow, 117997, Russian Federation, kanareykins@mail.ru,
ORCID: 0000-0001-9108-7495

Статья доступна по лицензии
Creative Commons «Attribution-NonCommercial»

32 международная агропромышленная выставка-ярмарка
АГРОРУСЬ-2023

Выставка «АГРОРУСЬ»
30 августа – 1 сентября 2023 г.
Ярмарка региональных продуктов «АГРОРУСЬ»
25 августа – 3 сентября 2023 г.

АГРОРУСЬ: агропромышленный конгрессно-выставочный форум, ориентированный на создаваемую отечественную агропищевую индустрию будущего – Foodne.

Актуальные темы выставки «АГРОРУСЬ-2023»:
- Цифровизация в сельском хозяйстве.
- Решение кадровых вопросов в сфере агропромышленного комплекса (АПК).
- Импортозамещение в сельскохозяйственной отрасли.
- Актуальные проблемы АПК.
- Современные тенденции развития профессионального аграрного образования.
- Экспорт продукции агропромышленного комплекса России.

Выставка будет состоять из следующих разделов:
- ✓ Выставка-продажа: продукты питания, пищевые добавки и ингредиенты.
- ✓ Зоотехния: питание (комбикорма, кормовые добавки), разведение, содержание (ветеринария, средства по уходу).
- ✓ Растениеводство: селекция, удобрения, средства защиты растений.
- ✓ Оборудование для пищеперерабатывающей промышленности (в т. ч. для малых форм хозяйствования АПК).
- ✓ Услуги по упаковке, хранению, транспортировке, утилизации.

http://agrorus.expoforum.ru/

Организатор выставки-ярмарки:
Министерство сельского хозяйства РФ, при официальной поддержке Правительств Санкт-Петербурга и Ленинградской области.

Контакты:
Тел./факс: +7 (812) 240-40-40, доб.2235
E-mail: e.gabuchiya@expoforum.ru,

Место проведения:
КВЦ «Экспофорум»
Петербургское шоссе 64, корпус 1