

Аналитическое выражение коэффициента теплопроводности в процессе охлаждения хлебобулочных изделий

Канд. техн. наук В. Б. ДАНИН, А. С. ПАСТУХОВ

Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9

The paper presents a simulator to define heat conductivity of bread that is cooled after it leaves the bakery oven. An inverse method was used that allowed to construct temperature and moisture content multinomial's. Solution of the sensitivity equation enabled to mathematically define the optimal location of temperature gage. Moreover the sensitivity of the method was tested to study the influence of inaccurate parameter values of the model.

Key words: bakery foods, bread heat conductivity, moisture content, temperature.

Ключевые слова: хлебобулочные изделия, теплопроводность хлеба, влагосодержание, температура.

В настоящее время проектирование почти всех технологических процессов осуществляется с использованием компьютерного моделирования. Разработаны специальные модели, основанные на знании теплофизических параметров тех или иных пищевых продуктов, а также методы и способы измерения этих параметров. Знание теплопроводности хлебобулочных изделий имеет важное значение для исследователей, которые используют методы моделирования в своих работах по совершенствованию процесса изготовления хлебобулочных изделий. Основная цель таких работ — это предвидение тепло- и массоперемещений, которые происходят в продуктах, для оптимизации технологических процессов производства.

Теплопроводность в значительной степени зависит от температуры и местного влагосодержания [1, 2]. Определение теплопроводности в соответствии с этими двумя переменными требует проведения ряда измерений, на которые затрачивается значительное количество времени. Альтернативой является использование так называемого обратного метода. Обратные методы были разработаны для измерения теплопроводности образцов с простой геометрией: пластины, цилиндра и параллелепипеда [3].

Мартинс и Силва в 2004 г. определили теплоемкость и теплопроводность замороженной стручковой фасоли при размораживании путем экспериментального измерения и путем вычисления обратным методом. Обратный метод дал лучшие результаты, чем метод измерений. Для

прямой задачи рассматривалась теплопередача в сечении зеленой фасоли. Задача решалась с помощью метода конечных элементов. Обратный метод использовался для оценки параметров теплоемкости и теплопроводности (выше и ниже точки замерзания). Поиск минимума проводился с помощью симплексного алгоритма [4].

Представленное в данной статье исследование аналогично исследованию Мартинса и Силвы с определенных технических точек зрения: сложная геометрия объекта — и прямая задача решается с помощью метода конечных элементов; метод обратной задачи используется для оценки теплофизических свойств и непостоянных свойств; наконец, метод используется для исследования реальных пищевых продуктов. Тем не менее он отличается областью применения (хлебопекарная промышленность), а также использованием коммерческого программного обеспечения для решения прямых и обратных задач.

Основная цель данного исследования — разработка обратного метода для оценки теплопроводности хлеба в зависимости от температуры и локального влагосодержания. Вторая цель заключается в определении места размещения температурного датчика, снимающего показания и записывающего историю изменения температуры во время опыта, для получения наилучших результатов. Третья цель состоит в проверке соответствия метода параметрам, которые могут быть известны неточно.

Эксперименты проводились на хлебе, который был изготовлен в лаборатории и охлаждался после выпечки путем либо естественной, либо принудительной конвекции.

Охлаждение с принудительной циркуляцией воздуха проводилось в климатической камере Votsch VC-7018. Камера оснащена контроллерами температуры и относительной влажности. Скорость воздуха измерялась с помощью анемометра VelociCalc 8355, она колебалась в пределах 1,5–2,5 м/с. Несколько экспериментов были проведены при различных условиях окружающей среды: пять — при естественной конвекции и два — при вынужденной конвекции. Условия выполнения экспериментов приведены в табл. 1.

Точность метода оценки теплопроводности определяется по минимизации функции J . Мерой рассогласования между экспериментальными данными температуры и температуры, вычисленной путем моделирования в точке продукта, служит сумма квадратов разностей между ними (метод наименьших квадратов):

$$J = \sum_1^N (T_{\text{экc}} - T_{\text{комп}})^2. \tag{1}$$

Теплопроводность хлеба варьируется в зависимости от его состава (сухое вещество, влага, газ), структуры (пористость) и переменных температуры и влажности.

Во время операции охлаждения хлеба происходит изменение температуры во всем продукте. Также в зонах, прилегающих к корке, изменяется местное влагосодержание, что сопровождается испарением влаги с поверхности буханки. В только что выпеченной буханке пористость полностью определяется местным влагосодержанием, так как твердый «скелет» считается постоянным и однородным по всему продукту за время охлаждения. Иными словами, состояние хлеба во время охлаждения полностью определяется температурой и местным влагосодержанием. Поэтому экспериментальная физическая

модель теплопроводности может рассматриваться как функция этих двух переменных.

Итак, теплопроводность рассчитывается как полиномиальная функция от температуры и местного влагосодержания:

$$\lambda = aTW + bT + cW + d, \tag{2}$$

где a, b, c, d — коэффициенты полинома.

Для каждого из семи экспериментов был получен набор этих переменных (многочлен) и вычислен средний для экспериментов многочлен.

Модель основана на втором законе Фурье для теплопередачи и втором законе Фика для массопередачи и нестационарной диффузии:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla T); \tag{3}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \nabla(D \nabla W), \tag{4}$$

где ρ — плотность продукта;

C_p — теплоемкость продукта;

λ — теплопроводность продукта;

T — температура продукта;

W — местное водосодержание.

С учетом граничных условий при конвекции, лучистом теплообмене и испарении

$$\begin{aligned} n(\lambda \nabla T) &= L_w k_i (P_{o.c} - P_S) + \\ &+ \alpha_i (T_{o.c} - T) + \varepsilon \sigma (T_{o.c}^4 - T^4); \end{aligned} \tag{5}$$

$$n(D \nabla W) = -k_i (P_S - P_{o.c}) / \rho_{\text{сух.в}}, \tag{6}$$

где L_w — скрытая теплота парообразования;

k_i — коэффициент конвективной массоотдачи;

$$P_{o.c} = \varphi P_{\text{насыщ}}(T_{o.c}); \tag{7}$$

P_S — давление насыщенного пара,

Таблица 1

Охлаждение хлеба

№ эксперимента	Конвективное охлаждение	Температура окружающей среды $T_{o.c}$, °C	Относительная влажность окружающей среды φ , %
1	Естественное	20,1	48,6
2	Естественное	19,2	52,4
3	Естественное	19,4	47,9
4	Естественное	20,1	47,2
5	Естественное	20,0	46,6
6	Принудительное	19,1	49,4
7	Принудительное	13,2	48,4

$$P_S = \alpha_v P_{\text{насыщ}}(T); \quad (8)$$

α_i — коэффициент конвективной теплоотдачи;

ε — коэффициент черноты;

σ — постоянная Стефана–Больцмана.

Давление насыщения определяется из уравнения Антуана

$$P_{\text{насыщ}}(T) = 133,3e^{18,3036 - \frac{3816,44}{T-46,13}}. \quad (9)$$

Чтобы найти потерю массы, поток испарения надо проинтегрировать по поверхности и по времени:

$$p = \int_0^t \int_S k_i (P_S - P_{o.c}) dS d\tau. \quad (10)$$

Теплоемкость C_p измерялась с помощью DSC (micro-DSC III, Setaram, Caluire); коэффициент черноты был принят соответствующим для хлебобулочных изделий.

Коэффициенты конвективной тепло- и массоотдачи для каждой стороны буханки k_i и α_i были приняты при помощи числа Льюиса на основании скоростей обдувающего продукт воздуха. Численные характеристики параметров приведены в табл. 2.

Начальные условия: среднеобъемная температура — 96,15 °С; местное влагосодержание — 0,762 кг воды/кг сух. в. Минимум критериальной функции J был опробован при помощи метода последовательного квадратичного программирования (SQP) на программном обеспечении Matlab 7.0.

Сравнение проводилось между значениями температуры, полученными экспериментальным путем и с помощью компьютерной модели. Для выбора наиболее подходящей точки был проведен анализ чувствительности модели. Для этого уравнения чувствительности были получены путем дифференцирования уравнений модели по теплопроводности.

Таблица 2

Параметры модели

Параметр	Значение
C_p , кДж/(кг·К)	2,640
D , м ² /с	$5,98 \cdot 10^{-11}$
ε	0,9
ρ , кг/м ³	200
$\rho_{\text{сух.в}}$, кг/м ³	113,5
α_1 , Вт/(м ² ·К), при конвекции: естественной принудительной	6,94 14,00
α_2 , Вт/(м ² ·К), при конвекции: естественной принудительной	3,55 14,00
α_3 , Вт/(м ² ·К), при конвекции: естественной принудительной	7,20 14,00
k_1 , с/м, при конвекции: естественной принудительной	$4,47 \cdot 10^{-8}$ $9,02 \cdot 10^{-8}$
k_2 , с/м, при конвекции: естественной принудительной	$2,29 \cdot 10^{-8}$ $9,02 \cdot 10^{-8}$
k_3 , с/м, при конвекции: естественной принудительной	$4,64 \cdot 10^{-8}$ $9,02 \cdot 10^{-8}$

Решив эти уравнения для X_T , можно определить точку внутри хлеба, в которой температура наиболее чувствительна к теплопроводности.

Пригодность метода проверяется путем замены экспериментальных значений температуры значениями, рассчитанными с использованием модели для данного многочлена $\lambda(T, W)$.

Полученные результаты теплопроводности с учетом температуры и местного влагосодержания зависят также и от других параметров модели. Тем не менее получить точные данные по ним довольно трудно. Это относится к массовой диффузии D , теплоемкости C_p , коэффициентам тепло- и массоотдачи α_i и k_i соответственно. Влияние данных параметров было изучено путем применения в расчетах значений, увеличенных на 10 % (см. табл. 2), и последующего сравнения результатов. Для получения такой оценки были выбраны данные третьего эксперимента, из-за значений температуры и относительной влажности (см. табл. 1). При естественной конвекции коэффициенты тепло- и массоотдачи зависят от поверхности продукта. Для каждого из этих двух коэффициентов увеличение на 10 % было получено одновременно применительно к трем поверхностям.

Выбранный для проверки многочлен имеет вид

$$\lambda^* = 7,78 \cdot 10^{-3}TW - 1,69 \cdot 10^{-4}T - 2,2W + 7,2 \cdot 10^{-2}, \tag{11}$$

а полином, полученный обратным методом, выглядит следующим образом:

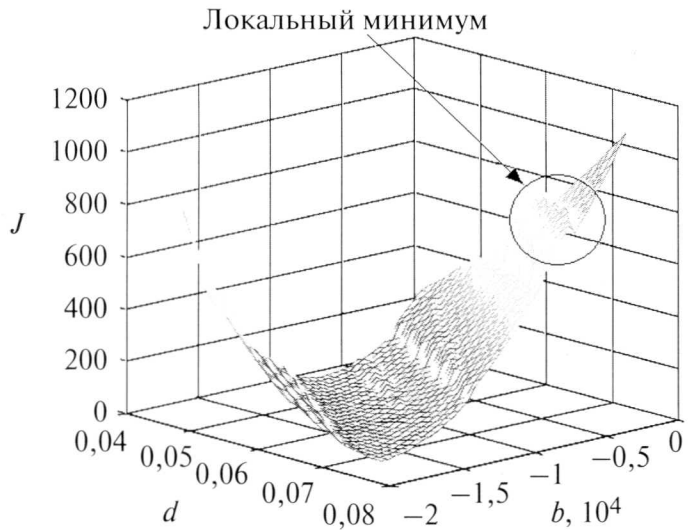


Рис. 1. Поверхность функции J : $a = 7,78 \cdot 10^{-3}$, $c = -2,20$

$$\lambda(T, W) = 7,46 \cdot 10^{-3}TW - 6,80 \cdot 10^{-10}T - 2,16W + 4,3 \cdot 10^{-2}. \tag{12}$$

Таким образом, эти многочлены незначительно отличаются друг от друга. Есть локальные минимумы. Например, на рис. 1 показана поверхность функции J , где коэффициенты многочлена $\lambda(T, W)$ из уравнения (2) b и d — переменные, а коэффициенты a и c — фиксированные. Как часто видно в задачах оптимизации, начальная точка должна быть тщательно подобрана. Тем не менее, как следует из рис. 2, поверхности оптимумов для многочленов λ^* и $\lambda(T, W)$ близки. Критериальная функция принимает очень низкое значение $3,6 \cdot 10^{-3}$, а вариации экспериментальных и расчетных данных температуры в центре примерно одинаковые.

Результаты эксперимента приведены в табл. 3. Для каждого коэффициента значение статической значимости p превышает 0,05; это означает, что нулевая гипотеза не может быть отклонена, доверительный интервал с вероятностью 95 % покрывает как среднее значение 10 образцов, так и оптимальный многочлен. Это свидетельствует о том, что дисперсии, наблюдаемые для результатов 10 параметров, соответствуют оптимальному многочлену.

Полиномы, полученные в результате всех экспериментов, немного отличаются друг от друга (рис. 3). Данный разброс является мерой повторяемости экспериментов. Только поверхности $\lambda(T, W)$, полученные в экспериментах № 4 и 5 (см. табл. 1), отличаются от поверхностей, полученных в других опытах.

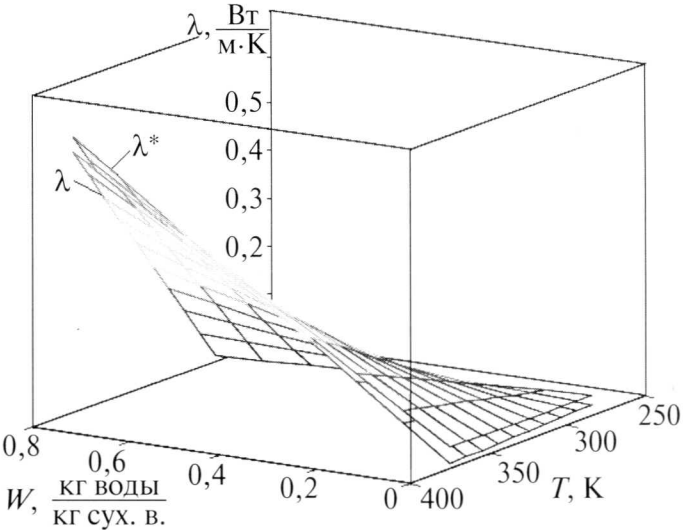
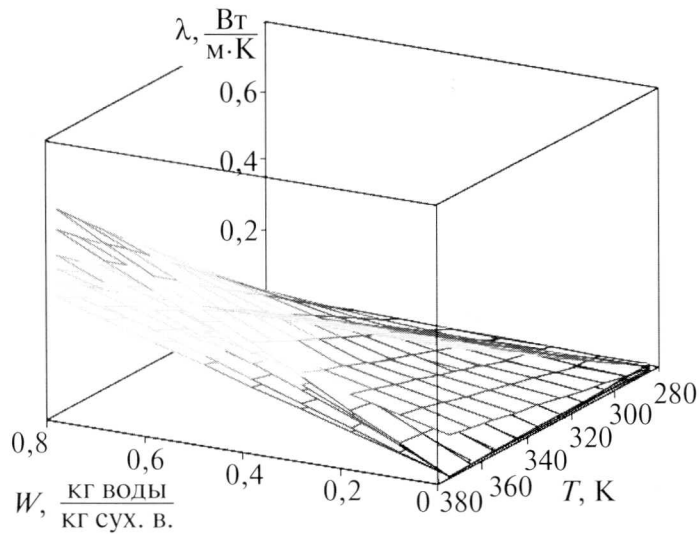


Рис. 2. Проверка метода (λ — расчетная поверхность; λ^* — поверхность)

Проверка метода

Параметр	a	b	c	d
Оптимальное значение	$7,78 \cdot 10^{-3}$	$-1,69 \cdot 10^{-4}$	$-2,20$	$7,2 \cdot 10^{-2}$
Среднее значение	$7,4188 \cdot 10^{-3}$	$1,609 \cdot 10^{-4}$	$-2,3795$	$1,846 \cdot 10^{-1}$
Величина p	0,3905	0,287	0,203	0,267
Доверительный интервал	$[6,5130 \cdot 10^{-3}, 8,3246 \cdot 10^{-3}]$	$[-4,979 \cdot 10^{-4}, 8,197 \cdot 10^{-4}]$	$[-2,6757, -2,0834]$	$[-3,05 \cdot 10^{-2}, 3,996 \cdot 10^{-1}]$

Рис. 3. Поверхности функции $\lambda(T, W)$

Кривые расчетной и экспериментальной температур в центре буханки в каждом эксперименте являются примерно одинаковыми.

На рис. 4 показано сравнение данных, полученных в эксперименте № 2, с расчетными значениями температуры в центре буханки.

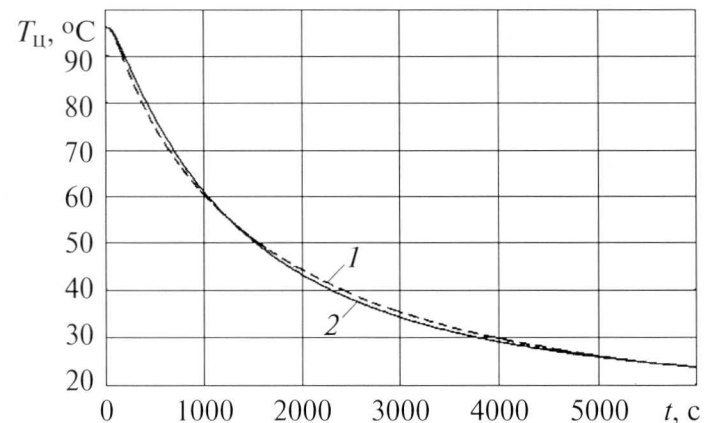
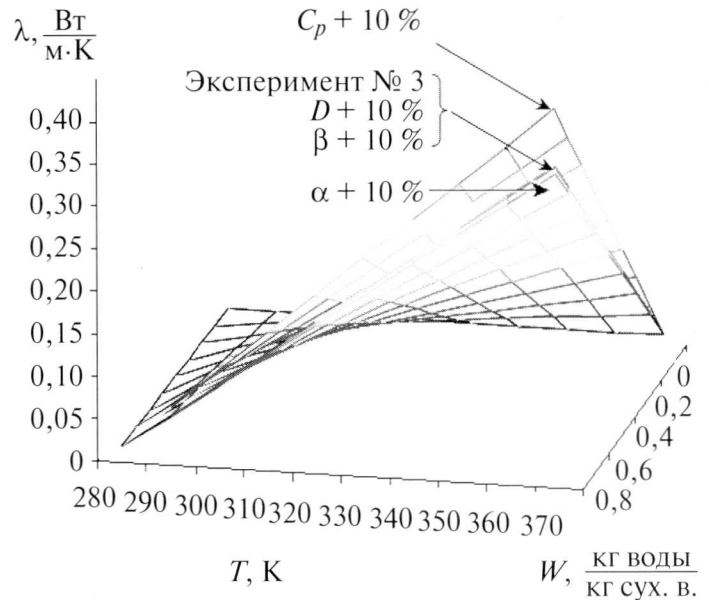


Рис. 4. Экспериментальная (1) и расчетная (2) температуры в центре буханки

На рис. 5 показан график, позволяющий оценить влияние ошибки параметров D , C_p , α_i и β_i , составляющей 10 %. Разрыв по сравнению с многочленом, полученным в эксперименте № 3, увеличивается с ростом температуры и местного влагосодержания. Кроме поверхности, полученной для C_p , поверхности $\lambda(T, W)$ почти аналогичны поверхности, полученной для функции без изменения параметров.

Рис. 5. Чувствительность метода к параметрам D , C_p , α и β

В табл. 4 для каждой поверхности приведен еще больший разрыв (по сравнению с экспериментальными значениями), полученный для высоких значений температуры и местного влагосодержания (375 К и 0,8 кг воды/кг сух. в.). Разница со значениями изменяемых параметров составляет 18 % для теплоемкости C_p и 2,34 % для теплоотдачи α_i . Для коэффициентов D и β_i разница незначительна. Таким образом, для того чтобы в результате получить достоверные данные о величине теплопроводности, необходимо изначально иметь точные данные теплоемкости.

Чувствительность метода к параметрам D , C_p , α и β

Изменяемые параметры модели	λ , Вт/(м·К)*	δ , %
D	0,3791	–0,184
C_p	0,4481	+18,0
α	0,3709	+2,34
β	0,3799	+0,0263

* Значение теплопроводности, полученное в эксперименте № 3, составляет 0,3798 Вт/(м·К).

Выводы

В данном исследовании теплопроводность хлеба оценивали обратным методом, используя многочлены температуры и влагосодержания, в процессе охлаждения хлеба после выпечки. Лучшее место для расположения температурного датчика было определено математически путем решения уравнения чувствительности.

Метод был подтвержден статистически, а затем применен в семи экспериментах, в результате которых был получен средний многочлен. Для исследования последствий неточных значений параметров модели была проверена чувствительность метода.

Данный метод может быть применен при изучении влияния других переменных на желаемую переменную. Так, может быть рассмотрено использование обратных методов для определения таких параметров, как массоотдача, которую не так-то легко определить в зависимости от температуры и местного влагосодержания воды.

Наконец, использование обратного метода для процессов охлаждения любых видов хлебобулочной продукции свидетельствует о перспективе возможного применения этих методов в промышленности.

Список литературы

1. Походун А. И., Шарков А. В. Экспериментальные методы исследований. Измерения теплофизических величин: Учеб. пособие. — СПб.: СПбГУИТМО, 2006.
2. Nesvadba P. Methods for the measurement of thermal conductivity and diffusivity of foodstuffs // Journal of Food Engineering. 1982. Vol. 1.
3. Темкин А. Х. Обратные методы теплопроводности. — М.: Энергия, 1973.
4. Martins R. C., Silva C. L. M. Inverse problem methodology for thermal-physical properties estimation of frozen green beans // Journal of Food Engineering. 2004. Vol. 63. N 4.