

УДК 531+681

Разработка алгоритма решения уравнений Навье—Стокса для течения криогенной жидкости в трубе

Канд. техн. наук А. В. ЗАЙЦЕВ

Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9

Finite-difference realization of a differential equation system for movement, continuity and energy has been developed jointly with equation of state to calculate three dimensional transient profiles of longitudinal velocity, pressure, temperature and density of a viscous medium flowing inside a tube.

An algorithm and an appropriate computer program have been elaborated and numerical values for a concrete cryogenic substance — one-phase (liquid) methane, with specific initial and boundary conditions — have been obtained.

Key words: Navier-Stocks equation, longitudinal velocity, pressure.

Ключевые слова: уравнение Навье—Стокса, продольная скорость, давление, температура, плотность вязкой среды.

Краткая постановка общей задачи

Рассматривается нестационарный трехмерный процесс течения вязкой среды в канале с наличием теплопритоков. Следует учитывать: возможное двухфазное состояние среды, наличие объемных сил, влияние внутренней вязкости потока, возможность различных гидродинамических режимов течения, турбулентность, зависимость теплофизических свойств в любой точке от состояния потока, несовершенство среды. Граничные условия определяются параметрами потока на входе в канал и условиями теплообмена и трения на стенках канала.

При такой постановке задача сводится к поиску решения приведенных ниже уравнений [1]:

— основного уравнения Навье—Стокса динамики вязкого газа в проекциях:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \\ & = F_x + \frac{1}{\rho} \left\{ -\frac{\partial p}{\partial z} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] - \\ & \left. - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\}; \quad (1) \\ & \frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = F_y + \frac{1}{\rho} \left\{ -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \right. \\ & + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] - \\ & \left. - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\}; \quad (2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} =$$

$$\begin{aligned} & = F_z + \frac{1}{\rho} \left\{ -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \\ & \left. - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\}; \quad (3) \end{aligned}$$

— уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0; \quad (4)$$

— уравнения энергии

$$\begin{aligned} & c_p \rho \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + q_v + 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \\
& + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \\
& - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2; \quad (5)
\end{aligned}$$

— уравнения состояния (одного из возможных вариантов)

$$\frac{p}{\rho} = ZRT. \quad (6)$$

Искомыми неизвестными функциями в этой системе из шести уравнений является распределение проекций скоростей, давления, температуры и плотности по каналу — $u(x, y, z, \tau)$, $v(x, y, z, \tau)$, $w(x, y, z, \tau)$, $p(x, y, z, \tau)$, $T(x, y, z, \tau)$, $\rho(x, y, z, \tau)$.

Методика решения сложных технических задач численными методами

С целью ясности изложения из всего набора возможных задач в дальнейшем будем рассматривать подкласс прикладных задач, т. е. задач, относящихся к областям техники и технологии, физики, химии, экономики и др.

Математическая постановка любой задачи в самом общем виде

$$\Phi_i(f_j, x_k) = 0, \quad (7)$$

где Φ — функционал, определенный на множестве функций f_j ;

f — неизвестная искомая функция $f = f(x_k)$;

x_k — независимые переменные, которыми во многих прикладных задачах чаще всего являются время и координаты ($k = 1, 2, 3, 4$);

$i = 1, 2, \dots, m$ — номер уравнения в общей системе уравнений, описывающих изучаемое явление;

$j = 1, 2, \dots, n$ — номер неизвестной функции.

Для выполнения условия однозначности решения необходимо выполнение равенства $m = n$.

Задача в такой постановке часто оказывается сложной не только для поиска аналитического решения, но и для решения с применением вычислительной техники. Поэтому стандартными действиями исследователей являются введение различных допущений, ограничений, приближений; применение методов линеаризации; уменьшение количества функций и размерности и т. п. В результате задача (7) преобразуется к виду

$$\Phi'_i(f_j, x_k) = 0. \quad (8)$$

При этом констатация факта адекватности задач (7) и (8) зачастую остается без строгого научного доказательства, а решение задачи (8) необоснованно распространяется на исходную поставленную задачу (7).

Результатом решения упрощенной задачи (8) является набор значений функций $f'_j(x_k)$ (поле функции), превращающих уравнения системы (8) в тождества

$$\Phi'_i(f'_j, x_k) \equiv 0. \quad (9)$$

Данный факт также следует подтвердить соответствующими вычислениями.

Когда систему не удается решить аналитически, находят численное приближенное решение с заданной точностью.

На следующем этапе необходимо проверить соответствие полученного решения исходной задаче, т. е. подставить f'_j в задачу (7) и определить невязку Δ для любых значений переменных x_k :

$$\Delta = \Phi_i(f'_j, x_k). \quad (10)$$

Если невязка оказывается в каждой точке x_k области определения f_j достаточно малой величиной с заданной точностью, то найденный набор значений $f'_j \approx f_j$ является решением исходной задачи (7). В противном случае следует признать совокупность сделанных допущений ошибочной.

Далее проиллюстрировано использование данной методики при решении системы уравнений (1–6). Расчеты начинаются с упрощенной модели, а полученные результаты подставляются в более сложную модель для проверки адекватности или в качестве первого приближения. Применяется метод конечных разностей, наиболее распространенный и универсальный метод решения сложнейших задач вычислительной механики и теплообмена сплошных сред (или просто вычислительной гидродинамики). При введении в дифференциальные уравнения новых членов заново производится анализ устойчивости и сходимости вновь получаемых разностных схем.

Течение вязкой жидкости в трубе, инвариантное по отношению к переносам в направлении движения

Допущения: теплофизические свойства постоянны (адиабатный процесс); поперечные (пульсационные) составляющие вектора скорости u и v пренебрежимо малы по сравнению с продольной составляющей w .

Следует определить продольные скорости в сечении, перпендикулярном направлению течения (оси z), т. е. решить уравнение

$$\frac{dw}{d\tau} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (11)$$

Если $\partial p / \partial z = 0$, то в конечных разностях получаем

$$w_{i,j}^{n+1} = w_{i,j}^n + \frac{v}{\rho} \left(\frac{w_{i-1,j}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{w_{i,j-1}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} \right) \Delta \tau. \quad (12)$$

Нижние индексы i, j соответствуют узлам пространственной сетки x_i и y_j ; верхний индекс n — текущему узлу временной сетки. Производная по времени аппроксимирована разностью вперед (маршевая координата), вторые производные по координате — центральными разностями.

Граничные условия: слои вязкой жидкости, прилегающие к поверхности стенки канала, имеют скорость cw_y , где $0 \leq c \leq 1$ — коэффициент проскальзывания; w_y — скорость в ядре потока. Частный случай при $c = 0$ описывает условие «прилипания», при $c = 1$ — условие «проскальзывания».

В качестве начального условия задается постоянная скорость потока во входном сечении и первом ближайшем к нему сечении канала.

Тестовые расчеты произведены для течения жидкого метана.

Численный эксперимент, как и ожидалось, показал существенное влияние параметров разностной схемы на устойчивость и сходимость итерационного процесса. Так, при $\Delta x = \Delta y = 0,1$ м шаг $\Delta \tau$ должен быть не больше $0,002$ с. Уменьшение вязкости с 1 до $0,001$ приводит к устойчивому решению при шаге по координатам $0,02$ м и по времени $0,01$ с.

Исследование сходимости и устойчивости

Под сходимостью обычно подразумевают стремление решения конечно-разностного аналога уравнения в частных производных к решению исходного уравнения (для одинаковых начальных и граничных условий) при измельчении сетки. Необходимым условием сходимости является выполнение условия устойчивости — отсутствие возрастания погрешности (округление, аппроксимация, ошибка) при переходе от узла к узлу в разностной сетке.

Решение системы разностных уравнений типа (12) производим итерационным методом, что позволит впоследствии перейти к более сложным уравнениям с различными видами нелинейностей. Считаем, что итерационный процесс сошелся, если во всех узлах разностной сетки отличие значений искомых функций на итерациях с номерами $k+1$ и k не превосходит некоторой заранее заданной малой величины ε , т. е. если $|u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k| < \varepsilon$ для всех i, j .

Уравнение (12) допускает теоретическое определение условия устойчивости по методу Неймана (разложение решения в ряд Фурье) [2, 3]. Получаем

$$\mu \Delta \tau \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right] \leq \frac{1}{2}. \quad (13)$$

Для достижения сходимости в сложных случаях возможно применение различных аппроксимационных формул для производных, изменение вычисляемых значений искомых функций на текущей итерации (аналог метода Зейделя) и другие численные эксперименты.

Анализ сходимости разностной схемы (12) при учете $\partial p / \partial z = \text{const}$ проиллюстрирован на графике рис. 1.

Таким образом, численный эксперимент показывает следующее:

- для каждого выбранного значения шага по координате существует предельный шаг по времени, выше которого процесс расходится;
- константа в уравнении (градиент давления) не влияет на скорость сходимости;
- чем меньше диаметр трубы, тем сложнее подобрать соотношение шагов. Пусть труба имеет радиус 5 см, тогда, согласно графику, шаг по координате $\Delta x = 1$ см соответствует шагу по времени $\Delta \tau = 10,5$ с, но это грубая сетка по координате. При задании $\Delta x = 1$ мм получаем $\Delta \tau = 0,105$ с (628 итераций), т. е. расчет медленно изменяющихся нестационарных процессов может потребовать много вычислительных ресурсов.

График на рис. 2 отражает область устойчивого решения тестовой задачи.

Использование уравнения неразрывности

На следующем этапе вводим независимую искомую функцию — поле давлений. Тогда $\partial p / \partial z \neq \text{const}$, и для нахождения двух неизвестных p и w следует рассматривать уравнение (11) совместно с еще одним уравнением, в частности с уравнением неразрывности.

Уравнение неразрывности (4) получено из закона сохранения вещества, которое для произвольного сечения для рассматриваемой задачи может быть записано в интегральном виде:

$$\int_F \rho w dF = \text{const} = G_0, \quad (14)$$

где F — площадь поперечного сечения;

G_0 — заданный массовый расход на входе в трубу.

Перейдя к конечным разностям, получаем

$$\sum_{i,j} \rho_{ij} w_{ij} \Delta x \Delta y = G_0 \quad (15)$$

и для каждого сечения (шага по z) методом последовательных приближений находим $\partial p / \partial z$, превращающее уравнение (15) в тождество.

На рис. 3 приведен вариант визуализации результатов расчета поля продольных скоростей. Динамика изменения скорости в различных точках сечения потока показана на рис. 4.

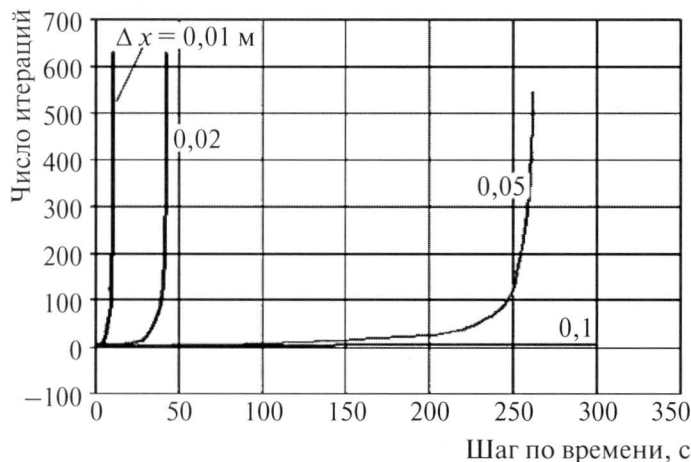


Рис. 1. Необходимое количество итераций в зависимости от соотношения шагов по координате и времени

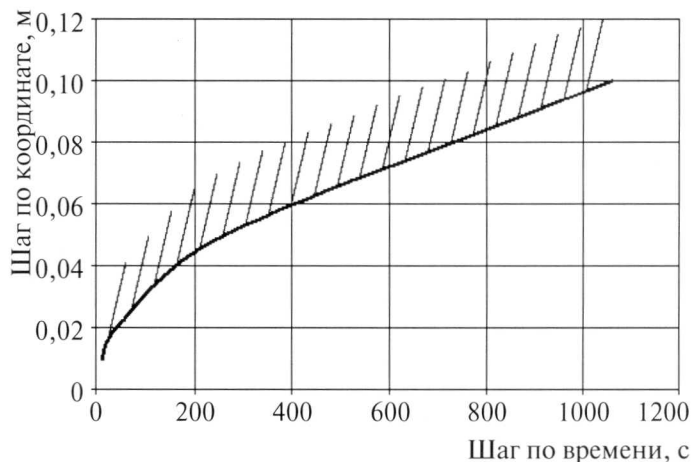
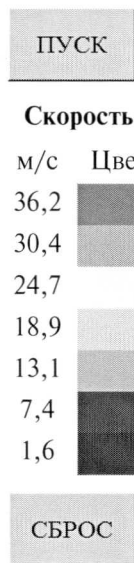
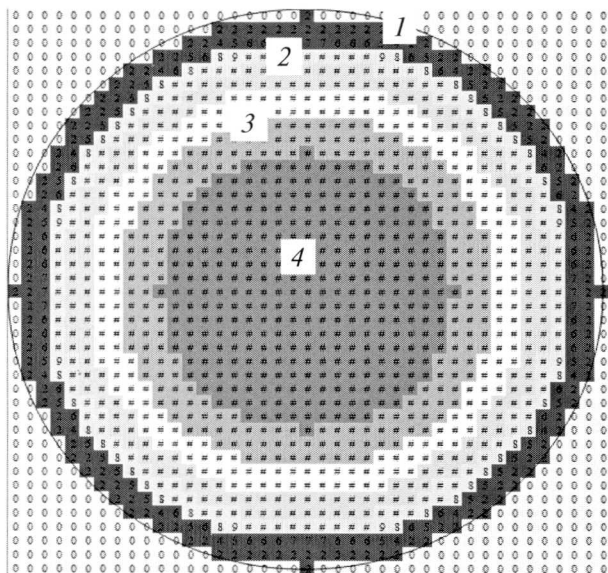


Рис. 2. Область устойчивого решения



Поле скоростей (z = 2 см, τ = 16 мин)

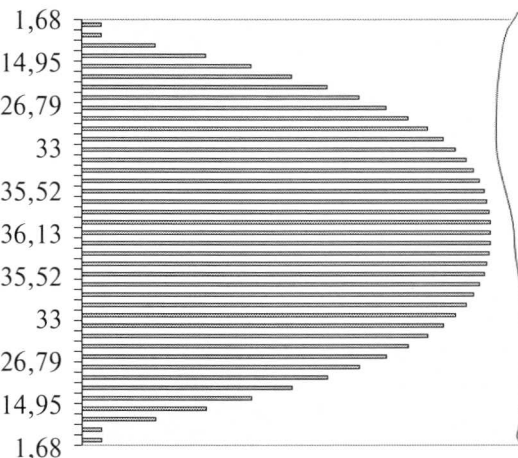


Рис. 3. Поле продольных скоростей: 1, 2, 3, 4 — точки сечения потока

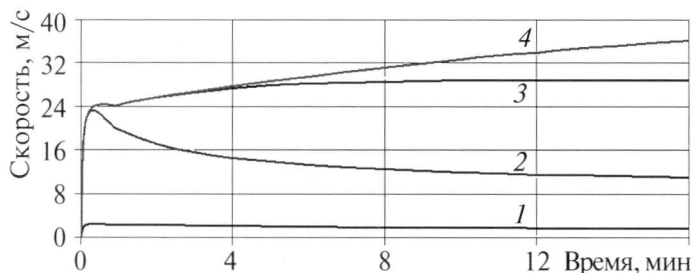


Рис. 4. Динамика изменения скорости: 1, 2, 3, 4 — точки сечения потока (см. рис. 3)

Параболизированное уравнение Навье–Стокса

Параболизированные уравнения Навье–Стокса применяются для внутренних течений, в которых можно выде-

лить преобладающее направление. Компонента скорости в этом основном направлении должна быть положительной, т. е. обратное течение в направлении основного потока запрещено. На компоненты скорости вторичного течения ограничений нет. Как и для всех форм параболизированных уравнений Навье–Стокса, диффузией в продольном направлении пренебрегают [2, 4].

В качестве дальнейшего развития алгоритма расчета рассматриваем замену уравнения (12) параболизированным уравнением Навье–Стокса при отсутствии касательных напряжений в текучей среде:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (16)$$

Разностный аналог последнего:

$$\begin{aligned} \frac{w - w'}{\Delta\tau} + w \frac{w_{k+1} - w}{\Delta z} = & -\frac{1}{\rho} \frac{p_{k+1} - p_k}{\Delta z} + \\ + \mu \left(\frac{w_{i-1} - 2w + w_{i+1}}{\Delta x^2} + \frac{w_{j-1} - 2w + w_{j+1}}{\Delta y^2} + \right. & \\ \left. + \frac{w_{k-1} - 2w + w_{k+1}}{\Delta z^2} \right). & \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь для упрощения записи введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} w &= w_{i,j,k}^n; & w' &= w_{i,j,k}^{n-1}; & w_{i-1} &= w_{i-1,j,k}^n; \\ w_{i+1} &= w_{i+1,j,k}^n; & w_{j-1} &= w_{i,j-1,k}^n; & w_{j+1} &= w_{i,j+1,k}^n; \\ w_{k-1} &= w_{i,j,k-1}^n; & w_{k+1} &= w_{i,j,k+1}^n. \end{aligned}$$

Производная по времени аппроксимируется разностью назад. Разрешая уравнение (17) относительно w_{k+1} , получаем маршевую задачу по координате z . Аппроксимация $\partial w / \partial z$ разностью вперед, т. е. замена первого члена уравнения (17) на $\frac{w' - w}{\Delta\tau}$, где $w' = w_{i,j,k}^{n+1}$, позволяет разрешить уравнение относительно w' и получить маршевую задачу по времени. Численный эксперимент подтвердил преимущество аппроксимации $\partial w / \partial z$ разностью вперед.

$$\begin{aligned} w' = w + \left[-\frac{1}{\rho} \frac{p_{k+1} - p_k}{\Delta z} - w \frac{w_{k+1} - w}{\Delta z} + \right. & \\ + \mu \left(\frac{w_{i-1} - 2w + w_{i+1}}{\Delta x^2} + \frac{w_{j-1} - 2w + w_{j+1}}{\Delta y^2} + \right. & \\ \left. \left. + \frac{w_{k-1} - 2w + w_{k+1}}{\Delta z^2} \right) \right] \Delta\tau. & \end{aligned} \quad (18)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{\rho} \frac{p_{k+1} - p_k}{\Delta z}; & A_2 &= -w \frac{w_{k+1} - w}{\Delta z}; \\ A_3 &= \mu \left(\frac{w_{i-1} - 2w + w_{i+1}}{\Delta x^2} + \frac{w_{j-1} - 2w + w_{j+1}}{\Delta y^2} + \right. & \\ \left. + \frac{w_{k-1} - 2w + w_{k+1}}{\Delta z^2} \right). & \end{aligned}$$

Тогда

$$w' = w + (A_1 + A_2 + A_3)\Delta\tau.$$

Расчеты показывают, что введение в уравнение конвективного члена $w(\partial w / \partial z)$ приводит в разностной аппроксимации к преобладанию комплекса A_2 над другими

и за счет этого — к некоторому сглаживанию поля скоростей в сечении.

Усложнение расчетной схемы приводит к усложнению компьютерной программы и, как следствие, к повышенной чувствительности с точки зрения устойчивости схемы к величине скорости на входе и соотношению шагов по времени и по координате вдоль оси z . Следует также учесть изменение определенного выше условия сходимости. С увеличением скорости потока на входе надо увеличивать шаг по z , увеличивать $\Delta p / \Delta z$, уменьшать шаг $\Delta\tau$. Возможность увеличения расчетного компьютерного времени в допустимых пределах следует учитывать при выборе расчетной схемы и соотношений шагов расчетной сетки.

Для сложных нелинейных уравнений теоретическое исследование устойчивости также вызывает определенные затруднения. Поэтому более продуктивным является применение численного эксперимента.

Уравнения неразрывности (16) и (4) используются в форме уравнения (14). Получено: сходимость обеспечивается в узком диапазоне $\Delta\tau \approx 4\Delta z^2$. Расчеты производились в диапазоне изменения $\Delta\tau$ от 0,16 до 1600 с. Сходимость констатировалась при выполнении в каждом расчетном сечении условия $G = G_0$ с заданной точностью.

Уравнение энергии. Решение системы уравнений

Рассмотрим уравнение энергии (5), пренебрегая диссипативной функцией, а также диффузионным переносом энергии, излучением и т. п.:

$$\begin{aligned} c_p \rho \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = & \\ = \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) + & \\ + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + q_v. & \end{aligned}$$

С учетом принятых ранее допущений пренебрегаем u, v , градиентом давлений по x и y , зависимостью теплотехнических свойств от состояния. Пусть $q_v = 0$.

Тогда

$$\begin{aligned} c_p \rho \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = & \\ = \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), & \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = -w \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{c_p \rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) +$$

$$+ \frac{\lambda}{c_p \rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (19)$$

Конечно-разностный аналог этого уравнения

$$\begin{aligned} \frac{T' - T}{\Delta \tau} = & -w \frac{T_{k+1} - T}{\Delta z} + \frac{1}{c_p \rho} \left(\frac{p' - p}{\Delta \tau} + w \frac{p_{k+1} - p}{\Delta z} \right) + \\ & + a \left(\frac{T_{i-1} - 2T + T_{i+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{j-1} - 2T + T_{j+1}}{\Delta y^2} + \right. \\ & \left. + \frac{T_{k-1} - 2T + T_{k+1}}{\Delta z^2} \right), \quad (20) \end{aligned}$$

где $T = T_{i,j,k}^n$, $T' = T_{i,j,k}^{n+1}$, ..., аналогично уравнению (17);

a — коэффициент температуропроводности;

p — давление в текущей точке (i, j, k) в настоящий момент времени;

$p' = p(T')$ — давление в текущей точке в момент времени $n + 1$.

Проанализируем изменение давления вдоль трубы. На каждом участке Δz имеем найденное итеративно при решении уравнений движения и неразрывности значение $\partial p / \partial z$. В конечных разностях падение давления на участке Δz в момент времени $n + 1$ равно

$$\Delta p = \frac{\partial p}{\partial z} \Delta z.$$

Сумма падений давления равна суммарному гидравлическому сопротивлению. В задаче появляется ограничение $\Sigma \Delta p < p_{\text{вх}}$, которое определяет ограничение длины трубы при данном трении (проскальзывании) и напоре на входе.

Трехмерное поле давлений, начиная с сечения $z = \Delta z$ (слой $k + 1 = 2$), находим из выражения

$$p_{k+1} = p_k + \frac{\partial p}{\partial z} \Delta z. \quad (21)$$

Появляется возможность на каждой итерации в каждом узле по известным давлению $p_{i,j,k}^{n+1}$ и температуре $T_{i,j,k}^{n+1}$ уточнить из уравнения состояния (6) плотность $\rho_{i,j,k}^{n+1}$ и другие теплофизические параметры:

$$\rho_{i,j,k}^{n+1} = \frac{ZRT_{i,j,k}^{n+1}}{p_{i,j,k}^{n+1}}. \quad (22)$$

Теперь алгоритм решения системы уравнений (3–6) при заданных ограничениях заключается в совместном решении разностных уравнений (15), (18), (20–22). Выражение (21) не является самостоятельным независимым уравнением, оно лишь раскрывает найденное неявным образом значение $\partial p / \partial z$ через конечно-разностное приближение.

Выводы

1. В соответствии с предложенной методикой разработана конечно-разностная реализация системы дифференциальных уравнений движения, неразрывности и энергии совместно с уравнением состояния для расчета трехмерных нестационарных полей продольной скорости, давления, температуры и плотности вязкой среды при ее течении в трубе. При этом сделаны определенные допущения о пренебрежимо малой величине радиальных (пульсационных) составляющих скорости; отсутствии диффузионной составляющей скорости, касательных напряжений, диссипации энергии, однофазности и др. Впоследствии в процессе дальнейшего развития алгоритма все сделанные ограничения будут исключены.

2. Разработаны алгоритм и реализующая его компьютерная программа и получены численные результаты для конкретного криогенного вещества — метана — в однофазном (жидком) состоянии с конкретными начальными и граничными условиями.

3. Сформулирована задача по созданию методики численного исследования и получения условия устойчивости и сходимости для сложных дифференциальных уравнений в конечных разностях.

Список литературы

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов. 7-е изд., испр. — М.: Дрофа, 2003.
2. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2 т. / Пер. с англ. — М.: Мир, 1990.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983.
4. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980.