УДК 664.021.3/4.64 (035)

Кинетика диффузионных процессов при сушке квазиодномерных тел

Д-р техн. наук, проф. **В. Н. ВАСИЛЬЕВ**
Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49
Д-р техн. наук., проф. **В. Е. КУЦАКОВА**, *д-р техн. наук, проф.* **С. В. ФРОЛОВ**
mrpikh.kafedra@irbt-itmo.ru
Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО
Институт холода и биотехнологий
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9

Предложено использование казиодномерного приближения в теории регулярного режима для расчета продолжительности сушки. Рассмотрены первый период процесса, описываемый дифференциальным уравнением стационарного массопереноса, и второй период, описываемый уравнением нестационарного массопереноса. Предложены аналитические решения в виде расчетных уравнений. Также рассмотрено влияние функции распределения по времени пребывания на среднюю продолжительность процесса сушки для случая модели каскада аппаратов полного перемешивания.

Ключевые слова: расчетные уравнения, функция распределения, квазиодномерное приближение.

Kinetics of diffusion processes in drying quasi-one dimensional bodies

D. Sc. **V. N. VASILEV**
University ITMO,
197101, St. Petersburg, Kronverksky Ave., 49
D. Sc. **V. E. KUTSAKOVA,** *D. Sc.* **S. V. FROLOV**
mrpikh.kafedra@irbt-itmo.ru
University ITMO
Institute of Refrigeration and Biotechnologies
191002, Russia, St. Petersburg, Lomonosov str., 9

The use of quasi-one-dimensional approximation in the theory of regular mode for drying duration calculation is proposed. The first period of the process described with the help of the differential equation of steady-state mass transfer and the second one described with the equation of unsteady-state mass transfer have been studied. The analytical solutions in the form of algebraic equations have been found. The distribution function impact on the average duration of drying process due to time period is considered as well, with the cascade apparatus model for complete agitation being used.

Keywords: algebraic equations, distribution function, quasi-one-dimensional approximation.

Одной из основных задач аналитической теории сушки является решение дифференциальных уравнений массопереноса при соответствующих краевых условиях, что дает возможность описать поля влажностей в теле в любой момент времени. Обычно для решения этих уравнений параболического типа в частных производных необходимо применять методы математической физики. Задача осложняется тем, что, как правило, биологические объекты, в том числе пищевые продукты, являются телами сложной формы. Это осложняет решение и без того весьма сложной задачи. Кроме того, в промышленности чаще всего используются агрегаты, работающие в непрерывном режиме. Этот комплекс проблем может быть разрешен путем использования теории регулярного режима и решением уравнений массопереноса для квазиодномерных тел с учетом коэффициента формы. Влияние типа сушильных агрегатов может быть учтено введением функции распределения материала по времени пребывания в нем.

Как известно процесс сушки разбивается на два основных периода: постоянной и падающей скорости сушки.

Первый период (постоянная скорость сушки)

В первом периоде сушки поток влаги с поверхности тела постоянен и определяется внешними условиями. Математическая постановка задачи выглядит следующим образом. Во-первых, квазиодномерное уравнение диффузии

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{k}{x}\frac{\partial w}{\partial x}\right);$$

$$k = \frac{1}{\Phi} - 1; \quad \Phi = \frac{V}{SR}, \qquad (1)$$

где w — безразмерная влажность тела, кг влаги/кг массы тела;

τ — время, с; D — коэффициент диффузии, м^2/с;

x — координата поперек тела, м; $x = 0$ отвечает центру тела, $x = R$ — поверхности тела;

R — характерный размер тела, понимаемый как расстояние от поверхности тела до его центра (максимально удаленной от поверхности точке в глубине тела), м;

k — некоторый безразмерный коэффициент, выражаемый через безразмерный коэффициент формы тела Φ (бесконечной пластине отвечает $k = 0$, $\Phi = 1$; бесконечному цилиндру $k = 1$, $\Phi = 1/2$; шару $k = 2$, $\Phi = 1/3$);

V — объем тела, м^3; S — площадь поверхности тела, м^2.

Далее, граничные условия к уравнению (1):

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0,\tau)=0;\quad -D\rho\frac{\partial w}{\partial x}(R,0)=q;\ w_{\tau=0}=w_0, \qquad (2)$$

где ρ — плотность тела, кг/м^3;

q — поток влаги с единицы поверхности тела за единицу времени, кг/(м$^2\cdot$с), определяемый внешними условиями.

Первое из условий (2) — условие симметрии распределения влажности; второе — условие второго рода: постоянство потока влаги с поверхности.

Стационарным решением уравнения (1) с условиями (2) является параболический профиль влажности:

$$w=w_b-\frac{q}{R\rho}\left((k+1)\tau-\frac{(k+1)R^2-(k+3)x^2}{2(k+3)D}\right), \qquad (3)$$

здесь w_b — начальная влажность тела.

Усреднив выражение (3) по координате x, получим выражение для средней влажности (следует помнить, что усреднение должно проводиться с весом x^k):

$$\overline{w}(\tau)=\frac{\int_0^R x^k w(x,\tau)dx}{\int_0^R x^k dx}=w_b-\frac{q(k+1)}{R\rho}\tau. \qquad (4)$$

Последнее слагаемое в (3) нами специально было подобрано так, чтобы давать ноль при усреднении. Продолжительность первого периода составит:

$$\tau_1=\frac{\Phi\left(w_b-w_{cr}\right)R\rho}{q}, \qquad (5)$$

где w_{cr} — критическая влажность, при которой первый период сушки заканчивается; Φ — коэффициент формы тела, $k=\frac{1}{\Phi}-1.$

Частный случай изложенной теории (для бесконечной пластины, то есть при $k=0$) рассмотрен в работе [1].

Второй период (период падающей скорости сушки)

Во втором периоде поток влаги с поверхности убывает во времени (скорость сушки падает) и определяется уже не внешними условиями, а диффузией влаги внутри тела. Уравнение диффузии (1) и первое из граничных условий (2) те же, а вот на поверхности тела имеем граничное условие 3-го рода:

$$-D\frac{\partial w}{\partial x}(R,\tau)=\beta\left(w(R,\tau)-w_e\right), \qquad (6)$$

где β — коэффициент массоотдачи, м/с;

w_e — равновесная влажность (при которой тело перестает сохнуть).

Также из соотношения (3) для конца первого периода получаем начальное условие:

$$w(x,0)=w_{cr}+\frac{q}{R\rho}\frac{(k+1)R^2-(k+3)x^2}{2(k+3)D}. \qquad (7)$$

Приведем задачу к безразмерному виду. Введем безразмерные переменные и критерии:

$$E=\frac{w-w_e}{w_{cr}-w_e};\ \mathrm{Fo}=\frac{D\tau}{R^2};$$
$$\xi=\frac{x}{R};\ \mathrm{Bi}=\frac{\beta R}{D};\ \eta=\frac{qR}{\rho D},$$

где E — безразмерная влажность;

Fo — безразмерное время (критерий Фурье);

ξ — безразмерная координата;

Bi — безразмерный критерий Био;

η — безразмерный критерий, смысл которого: отношение характерной скорости влагоотдачи с поверхности в первом периоде к характерной скорости передачи влаги внутри тела.

В безразмерных переменных задача выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial E}{\partial \mathrm{Fo}}=\frac{\partial^2 E}{\partial\xi^2}+\frac{k}{\xi}\frac{\partial E}{\partial\xi};$$
$$\frac{\partial E}{\partial\xi}(0,\mathrm{Fo})=0;$$
$$-\frac{\partial E}{\partial\xi}(1,\mathrm{Fo})=\mathrm{Bi}E(1,\mathrm{Fo});$$
$$E(\xi,0)=1+\eta\frac{(k+1)-(k+3)\xi^2}{2(k+3)}. \qquad (8)$$

Задача (8) имеет точное решение в функциях Бесселя, однако решение трансцендентных уравнений с функциями Бесселя не самая удобная вещь для практических расчетов. Ранее, в работе [2], авторами данной статьи предлагался способ приближенного решения похожей задачи (получающийся из (8) при $\eta=0$) [3], основанный на прямом вариационном методе. Приведем основные результаты.

Решение апроксимировалось степенной функцией:

$$E(\xi,\mathrm{Fo})\approx\left(1-\frac{\mathrm{Bi}}{\mathrm{Bi}+b}\xi^b\right)\exp(-\mu_1^2\mathrm{Fo});$$
$$b=\frac{\sqrt{2k+6}-k-1}{2}. \qquad (9)$$

При этом для μ_1^2 было получено выражение:

$$\mu_1^2\approx\frac{\mathrm{Bi}(k+1)(\mathrm{Bi}+\sqrt{2k+6})(k+2\sqrt{2k+6}+5)}{4\mathrm{Bi}^2+4(\sqrt{2k+6}+2)\mathrm{Bi}+\sqrt{2k+6}(k+2\sqrt{2k+6}+5)}. \qquad (10)$$

Среднеобъемная же влажность определяется как

$$\overline{E}=A_v\exp\left(-\mu_1^2\mathrm{Fo}\right);$$

$$A_v\approx\frac{\int_0^1\xi^k\left(1-\frac{\mathrm{Bi}}{\mathrm{Bi}+b}\xi^b\right)d\xi}{\int_0^1\xi^k\left(1-\frac{\mathrm{Bi}}{\mathrm{Bi}+b}\xi^b\right)^2 d\xi}\times$$
$$\times\frac{\int_0^1\xi^k\left(1-\frac{\mathrm{Bi}}{\mathrm{Bi}+b}\xi^b\right)\left(1+\eta\frac{(k+1)-(k+3)\xi^2}{2(k+3)}\right)d\xi}{\int_0^1\xi^k d\xi}.$$

Вычисляя интегралы, получим:

$$A_v\approx$$
$$\approx\frac{(2\mathrm{Bi}+k+\sqrt{2k+6}+3)^2\sqrt{2k+6}}{\left(4\mathrm{Bi}^2+4(\sqrt{2k+6}+2)\mathrm{Bi}+\sqrt{2k+6}(k+2\sqrt{2k+6}+5)\right)(k+3)}\times$$
$$\times\left(1+\eta\frac{4\mathrm{Bi}(k+1)}{(k+3)\left(2\mathrm{Bi}+k+\sqrt{2k+6}+3\right)\left(k+\sqrt{2k+6}+7\right)}\right). \qquad (11)$$

Итоговая продолжительность второго этапа сушки до необходимой влажности w_{end} определяется как:

$$\mathrm{Fo}_2 = \frac{1}{\mu_1^2} \ln \frac{A_v}{E};$$

$$\tau_2 = \frac{R^2}{\mu_1^2 D} \ln\left(A_v \frac{w_{cr} - w_e}{w_{end} - w_e} \right). \quad (12)$$

В качестве примера рассмотрим сушку сухаря, используя данные работы [1]. Сухарь имеет форму бесконечной пластины (то есть $k = 0$, $\Phi = 1$), начальная влажность $w_b = 0{,}84$; критическая влажность $w_{cr} = 0{,}71$. Равновесную влажность примем равной $w_e = 0{,}1$; конечную $w_{end} = 0{,}2$. Характерный размер сухаря $R = 0{,}01$ м; поток массы с поверхности в первом периоде $q = 2{,}1 \cdot 10^{-4}$ кг/(м$^2 \cdot$ с); осредненный коэффициент диффузии $D = 1{,}3 \cdot 10^{-9}$ м^2/с. Тогда по формуле (5) продолжительность первого периода $\tau_1 = 26$ с. Далее, число Био $\mathrm{Bi} = 1{,}8 \cdot 10^5$, что практически равно бесконечности, то есть пределы выражений (10) и (11) можно отыскать при $\mathrm{Bi} \to \infty$, тогда

$$\mu_1^2 \approx \frac{(k+1)(k+2\sqrt{2k+6}+5)}{4};$$

$$A_v \approx \frac{\sqrt{2k+6}}{k+3}\left(1 + \frac{2\eta(k+1)}{(k+3)(k+\sqrt{2k+6}+7)}\right).$$

Критерий $\eta = 6{,}5$; $\mu_1^2 = 2{,}47$; $A_v = 1{,}20$. Продолжительность второго этапа составит $\tau_2 = 1030$ мин $= 17{,}2$ ч.

Учет функции распределения частиц по времени пребывания в аппарате

В случае, если различные частицы материала пребывают в аппарате неодинаковое время, расчет необходимого среднего времени пребывания в аппарате для первого периода не нуждается в корректировании, поскольку при постоянной скорости сушки в среднем частицы высохнут так же, как если бы они все пребывали в аппарате одинаковое время. Для второго же периода метод расчета нуждается во внесении коррективы [4, 5]. Изначально необходимо выбрать функцию распределения по времени пребывания материала в непрерывно действующем агрегате. Используем известную модель каскада аппаратов полного перемешивания [3]

$$f(\tau) = \left(\frac{\tau_m}{D}\right)^N \frac{\tau^{N-1}}{(N-1)!} \exp\left(-\frac{\tau_m}{D}\right); \; N = \frac{\tau_m^2}{D}, \quad (13)$$

где τ_m — среднее время пребывания, с;

D — дисперсия времени пребывания (определяется экспериментально, например методом меченых частиц), с^2;

N — число аппаратов (может оказаться и нецелым, тогда вместо факториала надо поставить гамма-функцию).

Зависимость средней безразмерной влажности от времени для второго периода, как мы видели, экспоненциальная:

$$\overline{E} = \frac{\overline{w} - w_e}{w_{cr} - w_e} = A_v \exp\left(-\mu_1^2 \frac{D\tau}{R^2}\right). \quad (14)$$

Тогда средняя влажность после прохождения непрерывно действующего агрегата определяется интегрированием произведения (13) и (14):

$$\overline{E} = \frac{N^N A_v}{\tau_m^N (N-1)!} \int_0^{+\infty} \tau^{N-1} \exp\left(-\left(\frac{N}{\tau_m} + \frac{\mu_1^2 D}{R^2}\right)\tau\right) d\tau = A_v \left(1 + \frac{\mu_1^2 D \tau_m}{R^2 N}\right)^{-N}. \quad (15)$$

При $N \to \infty$ выражение (15) стремится к (14), при конечном N (15) больше, чем (14). Тогда необходимое среднее время пребывания определяется как

$$\tau_m = \frac{R^2 N}{\mu_1^2 D}\left[\left(A_v \frac{w_{cr} - w_e}{w_{end} - w_e}\right)^{1/N} - 1\right]. \quad (16)$$

Среднее время процесса [6–8], рассчитанное по уравнению (16) больше, чем по уравнению (12), но стремится к нему при $N \to \infty$.

Список литературы

1. *Гинзбург А. С.* Основы теории и техники сушки пищевых продуктов. — М., Пищ. пром-сть, 1973.
2. *Фролов С. В., Меременский Г. И., Поляков К. Ю.* Расчет времени охлаждения пищевых объектов методом квазиодномерного приближения // Вестник Международной академии холода. 2004. № 3.
3. *Фролов С. В., Багаутдинова А. Ш.* Высшая математика. Этюды по теории и приложениям. — СПб.: ГИОРД, 2012.
4. *Фролов С. В., Куцакова В. Е., Маценко Л. В., Меремински Г. И.* Об определении температуры продукта при сушке его на инертных телах в вихревых аппаратах // Вестник Международной академии холода. 2002. № 3.
5. *Correa N. A., Freire F. B, Correa R. G., Freire J. T.* Industrial trials of paste drying in spouted beds under QDMC. // Drying Technology. 2004. № 22 (5).
6. *Kutsakova V. E.* Drying of Liquid and Pasty Products in a Modified Spouted Bed of Inert Particles // Drying Technology. 2004. № 10.
7. *Kutsakova V. E.* Effect of Inert Particles Properties on Performance of Spouted Bed Dryers // Drying Technology. 2007. № 4.
8. *Leontieva A. L., Bryankin K. V., Konovalov V. I., Utrobin N. P.* Heat and mass transfer during drying of a liquid film from the surface of a single inert particles. // Drying Technology. 2002. № 20 (4, 5).