УДК 539.319:620.172.22

Связь между упругими постоянными цилиндрически анизотропного тела

Канд. техн. наук **В.Н.ГЛУХИХ**
СПбГУНиИТ

A task for the determination of stresses of cylindrically anisotropic body is considered. The relationship between the elasticity constants of such a body has been established. By mathematical transformations the number of constants for their experimental determination according to standard procedures has reduced from 18 to 9. The presence of the minimum on the curve of the elasticity module over X axis is proved.

В опубликованной ранее работе [4] С.Г. Лехницким было получено дифференциальное уравнение в полярных координатах для цилиндрически анизотропного и ортотропного тела. Для решения задач, связанных с определением напряжений и перемещений в прямоугольных пластинах, у которых одна из осей анизотропии нормальна к срединной поверхности, потребуется аналогичное уравнение в декартовых координатах [2], имеющее вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}(x^4 + Bx^2y^2 + \alpha^2 y^4) + \\
&+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}(y^4 + Bx^2y^2 + \alpha^2 x^4) + \\
&+\frac{\partial^4 F}{\partial y \partial x^3}\left[2x^2 + B(y^2 - x^2) - 2\alpha^2 y^2\right]2xy + \\
&+\frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3}\left[2y^2 + B(x^2 - y^2) - 2\alpha^2 x^2\right]2xy + \\
&+\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2}\left[6x^2y^2 + B(x^4 - 4x^2y^2 + y^4) + 6\alpha^2 x^2 y^2\right] + \\
&+\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\left[2x^3 + Bx\left(3y^2 - x^2\right)6\alpha^2 xy^2\right] + \\
&+\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\left[2y^3 + By\left(3x^2 - y^2\right) - 6\alpha^2 x^2 y\right] + \\
&+\frac{\partial^3 F}{\partial y \partial x^2}\left[2(x^2 + 2\alpha^2 x^2) + B(y^2 - 3x^2) - 2\alpha^2 y^2\right]3y + \\
&+\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2}\left[2y^2(1 + 2\alpha^2) + B(x^2 - 3y^2) - 2\alpha^2 x^2\right]3x + \\
&+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left[2\alpha^2 - B\right](x^2 - y^2) + \\
&+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(B - 2\alpha^2)(x^2 - y^2) + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(2\alpha^2 - B)4xy = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\alpha^2 = \dfrac{E_t}{E_r}$ – показатель анизотропии;

$$B = \frac{E_t}{G_{rt}} - 2\mu_{tr}, \tag{1a}$$

где G_{rt} – модуль сдвига;

μ_{tr} – ;

E_t, E_r – модули упругости;

$F(x,y)$ – функция напряжений, удовлетворяющая уравнению (1).

Для решения задачи можно принять функцию напряжений в виде суммы полиномов [3]:

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{N} f_k(y)x^k . \tag{2}$$

Представим функцию напряжений в таком виде:

$$\begin{aligned}
&F(x,y) = f_0(y) + xf_1(y) + x^2 f_2(y) + x^3 f_3(y) + \\
&+x^4 f_4(y) + x^5 f_5(y) + x^6 f_6(y) + x^7 f_7(y) + \ldots
\end{aligned} \tag{3}$$

Подставляя соответствующие производные функции напряжений $F(x,y)$ из (3) в дифференциальное уравнение (1) и приравнивая к нулю полученные множители при соответствующих степенях x, получим систему дифференциальных уравнений, которым должна удовлетворять выбранная $F(x,y)$:

$$\begin{aligned}
&24\alpha^2 y^4 f_4 + 2By^4 f_2'' + 6\left(B - 2\alpha^2\right)y^3 f_2' + 2\left(B - 2\alpha^2\right)y^2 f_2 + \\
&+y^4 f_0^{IV}(y) + (2 - B)y^3 f_0''' - \left(B - 2\alpha^2\right)y^2 f_2'' = 0;
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&120\alpha^2 y^4 f_5 + 6By^4 f_3'' + 30(B - 2\alpha^2)y^3 f_3' + \\
&+24(B - 2\alpha^2)y^2 f_3 + y^4 f_1^{IV} + 3(2 - B)y^3 f_0''' + \\
&+2(3 + 7\alpha^2 - 5B)y^2 f_1'' - 4(B - 2\alpha^2)yf_1' = 0;
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
&360\alpha^2 y^4 f_6 + 12By^4 f_4'' + 84(B - 2\alpha^2)y^3 f_4' + \\
&+(108B - 168\alpha^2)y^2 f_4 + 5(2 - B)y^3 f_2''' + \\
&+(24 - 27B + 38\alpha^2)y^2 f_2'' + (12 + 40\alpha^2 - 26B)yf_2' + \\
&+2(B - 2\alpha^2)f_2 + By^2 f_0^{IV} + 3(B - 2\alpha^2)yf_0''' + (B - 2\alpha^2)f_0'' = 0;
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&840\alpha^2 y^4 f_7 + 20By^4 f_5'' + 180(B - 2\alpha^2)y^3 f_5' + \\
&+(320B - 400\alpha^2)y^2 f_5(y) + y^4 f_3^{IV} + \\
&+7(2 - B)y^3 f_3''' + (54 - 52B + 74\alpha^2)y^2 f_3'' + \\
&+(60 + 96\alpha^2 - 78B)yf_3'(y) + 12(1 + \alpha^2 - B)f_3 + \\
&+By^2 f_1^{IV} + 5(B - 2\alpha^2)yf_1''' + 4(B - 2\alpha^2)f_1'' = 0;
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь

$$f_0 = f_0(y); \quad f_1 = f_1(y); \ldots\ldots, \ f_7 = f_7(y);$$

$$f_0' = \frac{df_0}{dy}; \qquad f_1' = \frac{df_1(y)}{dy}; \ldots\ldots, \ f_7' = \frac{df_7(y)}{dy};$$

.....

$$f_0^{IV} = \frac{d^4 f_0(y)}{dy^4}; \ldots\ldots, \ f_7^{IV} = \frac{d^4 f_7(y)}{dy^4}.$$

Входящие в функции напряжений $F(x, y)$ функции $f_k(y)$, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям (4) – (7), запишем в виде:

$$f_0(y) = C_{01} + C_{02}y + C_{03}y^2 + C_{04}y^3 + C_{05}y^4 + \\ + C_{06}y^5 + C_{07}y^6 + C_{08}y^7 + C_{09}y^8 + C_{010}y^9; \tag{8}$$

$$f_1(y) = C_{11} + C_{12}y + C_{13}y^2 + C_{14}y^3 + C_{15}y^4 + \\ + C_{16}y^5 + C_{17}y^6 + C_{18}y^7 + C_{19}y^8 + C_{110}y^9; \tag{9}$$

$$f_2(y) = C_{21} + C_{22}y + C_{23}y^2 + C_{24}y^3 + \\ + C_{25}y^4 + C_{26}y^5 + C_{27}y^6 + C_{28}y^7; \tag{10}$$

$$f_3(y) = C_{31} + C_{32}y + C_{33}y^2 + C_{34}y^3 + \\ + C_{35}y^4 + C_{36}y^5 + C_{37}y^6 + C_{38}y^7; \tag{11}$$

$$f_4(y) = C_{41} + C_{42}y + C_{43}y^2 + C_{44}y^3 + C_{45}y^4 + C_{46}y^5; \tag{12}$$

$$f_5(y) = C_{51} + C_{52}y + C_{53}y^2 + C_{54}y^3 + C_{55}y^4 + C_{56}y^5; \tag{13}$$

$$f_6(y) = C_{62} + C_{62}y + C_{63}y^2 + C_{64}y^3; \tag{14}$$

$$f_7(y) = C_{71} + C_{72}y + C_{73}y^2 + C_{74}y^3, \tag{15}$$

где $C_{01}, \ldots, C_{74}$ – постоянные интегрирования.

Подставляя функции (8) – (15) и их соответствующие производные в (4) – (7), после преобразований получим соотношения между постоянными интегрирования, которые останутся неизменными независимо от числа принятых функций в ряду после $f_4(y)$ и $f_5(y)$.

Из уравнений (4) и (5) соответственно

$$C_{22} = -C_{04}\frac{3(1 - B + \alpha^2)}{2(B - 2\alpha^2)}; \tag{16}$$

$$C_{31} = C_{13}\frac{7B - 11\alpha^2 - 3}{6(B - 2\alpha^2)}. \tag{17}$$

Аналогично из уравнений (6) и (7):

$$C_{22} = -C_{04}\frac{6(B - 2\alpha^2)}{3 + 11\alpha^2 - 7B}; \tag{18}$$

$$C_{31} = C_{13}\frac{2(B - 2\alpha^2)}{3(B - \alpha^2 - 1)}. \tag{19}$$

Приравнивая левые и правые части уравнений (16) и (18) или (17) и (19), получим после преобразований алгебраическое уравнение

$$B^2 - \frac{10 + 2\alpha^2}{3}B - \frac{5}{3}\alpha^4 + \frac{14}{3}\alpha^2 + 1 = 0, \tag{20}$$

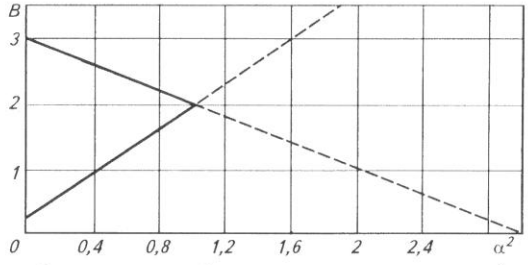
корни которого

$$B_{(1)} = \frac{1 + 5\alpha^2}{3}; \quad B_{(2)} = 3 - \alpha^2. \tag{21}$$

Таблица 1

Значения корней уравнения (20) при различных α^2

α^2	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,5	2	2,5	3
$B_{(1)} = (1 + 5\alpha^2)/3$	0,667	1	1,33	1,67	2	2,83	3,77	4,5	5,33
$B_{(2)} = 3 - \alpha^2$	2,8	2,6	2,4	2,2	2	1,5	1	0,5	0



Связь параметра B с показателем анизотропии α^2

Из последнего с учетом (1а) можно вычислить значения модуля сдвига для цилиндрически анизотропного тела:

при $B < 2$ $\quad G_{rt} = \dfrac{3E_t}{1 + 5\alpha^2 + 6\mu_{tr}}$; (22)

при $B > 2$ $\quad G_{rt} = \dfrac{E_t}{3 - \alpha^2 + 2\mu_{tr}}$. (23)

Обе формулы (22), (23) для случая изотропного тела (α^2=1) приобретают одинаковый вид:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \tag{24}$$

В табл. 1 приведены значения корней уравнения (20) в зависимости от показателя анизотропии α^2. Точка пересечения прямых на рисунке соответствует параметрам изотропного тела.

Для вычисления постоянных упругости при повороте координатных осей вокруг оси Z известные формулы [1, 4] приобретут, например, при $B_{(2)} = 3 - \alpha^2$ такой вид:

$$\frac{1}{E_x} = \frac{\cos^4\theta}{E_r} + \frac{3 - \alpha^2}{E_t}\cos^2\theta\sin^2\theta + \frac{\sin^4\theta}{E_t}; \tag{25}$$

$$\frac{1}{E_y} = \frac{\sin^4\theta}{E_r} + \frac{3 - \alpha^2}{E_t}\cos^2\theta\sin^2\theta + \frac{\cos^4\theta}{E_t}; \tag{26}$$

$$\frac{1}{G_{xy}} = \frac{8(\alpha^2 - 1)}{E_t}\sin^2\theta\cos^2\theta + \frac{1}{G_{rt}}; \tag{27}$$

$$\mu_{xy} = -E_x\left[\frac{2(\alpha^2 - 1)}{E_t}\sin^2\theta\cos^2\theta - \frac{\mu_{rt}}{E_r}\right]; \tag{28}$$

$$\nu_{x,xy} = \left(-\frac{\cos^2\theta}{E_r} + \frac{\sin^2\theta}{E_t} + \frac{\cos^2\theta}{G_{rt}}\right)\sin\theta\cos\theta - \frac{2\mu_{rt}}{E_r}. \tag{29}$$

При круговой перестановке индексов можно получить аналогичные зависимости при повороте системы координат вокруг осей X и Y.

Таблица 2

Значения упругих характеристик древесины некоторых пород

Порода древесины	E_r, МПа	E_t, МПа	E_t/E_r	μ_{tr}	μ_{rt}	G_{rt}, МПа [1]	G^*_{rt}, МПа (расчет)
Дуб	2185	985	0,4508	0,30	0,64	403	312,8
Бук	2285	1160	0,5076	0,36	0,75	467	361,1
Клен	1550	890	0,5742	0,40	0,82	287	275,9
Береза	1126	629	0,5586	0,38	0,78	192	196,5
Ясень	1537	818	0,5322	0,36	0,71	284	256,6
Пихта	940	490	0,5213	0,35	0,60	150	154,1

Исследуя зависимость (25) на экстремум, можно доказать наличие кроме двух главных значений (E_r и E_t) третьего экстремального значения при $\theta = 60°$:

$$E_{\min} = 8E_r/(9-\alpha^2)\,. \qquad (30)$$

Результаты вычисления модуля сдвига по формулам (22), (23), например, для такого известного материала с цилиндрической анизотропией, как древесина, можно сравнить с имеющимися экспериментальными значениями [1] (табл. 2).

Выводы.

- Установлена взаимосвязь между постоянными упругости цилиндрически анизотропного тела.
- Число постоянных для экспериментального определения по стандартным методикам сократилось с 18 до 9.
- Доказано наличие минимума на кривой модуля упругости по направлению оси *X*.

Список литературы

1. *Ашкенази Е.К., Ганов Э.В.* Анизотропия конструкционных материалов: Справочник. – М.: Машиностроение, 1980.
2. *Глухих В.Н.* Плоская задача теории упругости для цилиндрически анизотропного тела в декартовых координатах //Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. – СПб. 1998. Вып. 6(164).
3. *Курдюмов А.А.* О решении в полиномах плоской задачи теории упругости для прямоугольной анизотропной полосы // Прикладная математика и механика. Т. IX.
4. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. – М., 1957.