

Численное решение нелинейных задач теплопроводности*

Канд. техн. наук Е.В. ДИЛЕВСКАЯ, д-р техн. наук И. В. СТАНКЕВИЧ,
МГТУ им. Н.Э. Баумана
А. А. ПОПКОВ-МЕЛЕНТЬЕВ
ОАО «Русгидро»

A solution to the task of heat conductivity for a rectangular plate during heat exchange with the environment by convection and radiation on opposite end faces (other surfaces were insulated) has been proposed. The task is being solved for the case of immovable continuous medium and moving continuous medium. It is shown that finite-element technology allows carrying out efficient analysis of temperature state of heat exchange surfaces with different heat load.

Нелинейная трехмерная стационарная задача теплопроводности для неподвижной сплошной среды

Рассмотрим прямоугольную пластину, на противоположных торцевых поверхностях которой происходит теплообмен с окружающей средой соответственно конвекцией и излучением. Остальные поверхности теплоизолированы, кроме небольшого участка на одной из них, — на этом участке к пластине подводится тепло (рис. 1). Необходимо найти установившееся температурное поле пластины.

Математическая постановка данной задачи имеет следующий вид. Искомое распределение температуры удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}[\lambda(T)\operatorname{grad}(T)] = 0. \quad (1)$$

На поверхности S^* задано граничное условие 1-го рода $T|_{S^*} = T^*$. (2)

Поверхности S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 и S_6 принимаем теплоизолированными:

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \Big|_{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6} = 0. \quad (3)$$

На боковых поверхностях пластины S_3 и S_4 заданы условия конвективного и лучистого теплообмена

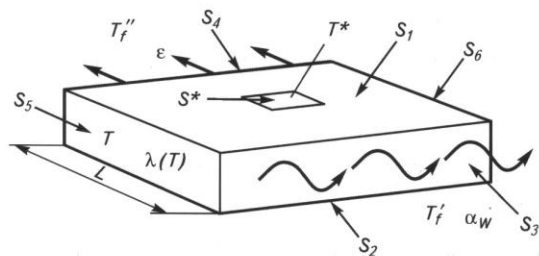


Рис. 1. Схема теплового нагружения пластины: L — ширина пластины; $S_1 - S_6$ и S^* — поверхности; T — температура; $\lambda(T)$ — теплопроводность; ε — излучение

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \Big|_{S_3} = -\alpha_w (T - T_f'). \quad (4)$$

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \Big|_{S_4} = -\varepsilon \sigma_0 (T^4 - T_f'^4) \Big|_{S_4}. \quad (5)$$

Совокупность уравнения (1) и граничных условий (2) — (5) составляет дифференциальную постановку краевой нелинейной задачи стационарной теплопроводности в неподвижной среде.

Так как рассматриваемая задача нелинейна, для ее решения используется метод последовательных приближений. По каждому приближению решается линейная задача. Для линеаризации преобразуем разность степеней температур в выражении (5) следующим образом:

$$(T^4 - T_f'^4) = (T - T_f'')(T + T_f'')(T^2 + T_f'^2)$$

и обозначим $C = (T + T_f'')(T^2 + T_f'^2)$. В результате получим плотность лучистого потока

$$q = \varepsilon \sigma_0 C (T - T_f''). \quad (6)$$

Зафиксируем температуру поверхности T , входящую в величину C (пусть $T = \bar{T}$). Тогда плотность лучистого потока (6) становится линейной функцией.

Также зафиксируем температуру в объеме пластины ($T = \bar{T}$), тогда можно определить значения $\lambda(\bar{T})$ и именно их использовать в дальнейших вычислениях на данной итерации.

Матричные соотношения метода конечных элементов (МКЭ) строятся на основании эквивалентной вариационной формулировки [1, 3, 5], которая применительно к линеаризованной задаче (1) — (5) предусматривает минимизацию функционала

$$J[T] = \frac{1}{2} \int_V [\lambda(\bar{T}) \nabla T]^2 dV + \frac{\alpha_w}{2} \int_{S_3} (T - T_f')^2 dS + \frac{\varepsilon \sigma_0}{2} \int_{S_4} C (T - T_f'')^2 dS. \quad (7)$$

Минимизация осуществляется на множестве узловых значений температуры $\{T\}$. Для этой цели воспользуемся следующей процедурой. Построим сетку конечных элементов (КЭ); интегральная величина $J[T]$ разбивает-

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (ФОИН: проект № 08-08-00204-а; ОФИ: проект № 08-08-12123) и по гранту поддержки ведущих научных школ № НШ-4140.2008.8.

ся на соответствующие отдельным элементам слагаемые, которые минимизируются по узловым значениям до того, как будут вычислены интегралы. В результате получается совокупность интегралов, которые могут быть вычислены и просуммированы по элементам.

Начнем процесс минимизации с ввода функций $T^{(e)}$ и $\tilde{T}^{(e)}$, определенных на отдельных элементах e . Выразим значения $T^{(e)}$ и $\tilde{T}^{(e)}$ через соответствующие узловые значения:

$$T^{(e)} = [N^{(e)}][a^{(e)}]\{T\}; \quad (8)$$

$$\tilde{T}^{(e)} = [N^{(e)}][a^{(e)}]\{\tilde{T}\}, \quad (9)$$

где $[N^{(e)}]$ – матрица, содержащая функции формы КЭ;

$[a^{(e)}]$ – матрица геометрических связей КЭ;

$\{T\}$ – глобальный вектор узловых значений температур, найденных на предыдущей итерации или каким-либо образом зафиксированных перед проведением первой итерации.

Как будет показано далее, при помощи вектора $\{\bar{T}\}$ в организованном итерационном процессе осуществляется коррекция величины C и матрицы D , связанной с коэффициентами теплопроводности.

Преобразуем функционал (7). Этот шаг несколько упрощает последующие операции. Введем две матрицы

$$\{g\}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} & \frac{\partial T}{\partial y} & \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (10)$$

и

$$D = \begin{bmatrix} \lambda^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(e)} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

В выражении (11) $\lambda^{(e)}$ представляется следующим образом:

$$\lambda^{(e)} = [N^{(e)}]\{\lambda^{(e)}\}, \quad (12)$$

где $\{\lambda^{(e)}\}^T = [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n]$ – вектор известных узловых значений теплопроводности, получаемых из зависимости $\lambda = \lambda(T)$ при подстановке в нее узловых значений температуры $\tilde{T}^{(e)}$;

n – число узлов в элементе.

Воспользовавшись (8), выражение (10) записываем в следующем виде:

$$\{g^{(e)}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial z} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial z} \end{bmatrix} [a^{(e)}]\{T\}, \quad (13a)$$

или

$$\{g^{(e)}\} = [B^{(e)}][a^{(e)}]\{T\}, \quad (13b)$$

где $[B^{(e)}]$ – матрица градиентов, содержащая информацию, связанную с производными от функций формы.

С учетом (8), (9), (11) и (13b) соотношение (7) может быть теперь записано в виде

$$J[T] = \sum_{e=1}^E \left(\int_{V^{(e)}} \left(\frac{1}{2} \{g^{(e)}\}^T [D^{(e)}] \{g^{(e)}\} \right) dV + \frac{\alpha_w}{2} \int_{S_f^{(e)}} (T^{(e)} - T_f)^2 dS + \frac{\varepsilon \sigma_0}{2} \int_{S_t^{(e)}} C T^{(e)^2} dS \right), \quad (14)$$

где E – количество конечных элементов;

$$C = (\tilde{T}^{(e)})^3.$$

Для упрощения задачи считаем, что в случае теплообмена излучением $T_f = 0$.

Последнее соотношение может быть записано как

$$J[T] = \sum_{e=1}^E J_e[T], \quad (15)$$

где $J_e[T]$ – вклад отдельного элемента в $J[T]$.

Использование формул (8) и (13b) позволяет записать интегралы по элементам в (14) в виде

$$\int_{V^{(e)}} \left(\frac{1}{2} \{g^{(e)}\}^T [D^{(e)}] \{g^{(e)}\} \right) dV = \frac{1}{2} \{T\}^T [a^{(e)}]^T \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV [a^{(e)}] \{T\}; \quad (16)$$

$$\frac{\varepsilon \sigma_0 C}{2} \int_{S_t^{(e)}} (T^{(e)})^2 dS = \frac{\varepsilon \sigma_0}{2} \{T\}^T [a^{(e)}]^T \times \int C [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS [a^{(e)}] \{T\}. \quad (17)$$

Интеграл, относящийся к конвективному теплообмену, распадается на три:

$$\frac{\alpha_w}{2} \int_{S_f^{(e)}} (T^{(e)})^2 dS = \frac{\alpha_w}{2} \{T\}^T [a^{(e)}]^T \times \int_{S_f^{(e)}} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS [a^{(e)}] \{T\}; \quad (18)$$

$$\alpha_w \int_{S_f^{(e)}} T^{(e)} T_f' dS = \alpha_w \int_{S_f^{(e)}} [N^{(e)}] T_f' dS [a^{(e)}] \{T\} \text{ и } \alpha_w \int_{S_f^{(e)}} T_f'^2 dS. \quad (19)$$

В выражении (17) $C = ([N^{(e)}][a^{(e)}]\{\tilde{T}\})^3$.

Минимизация $J[T]$ требует выполнения соотношения

$$\frac{\partial J[T]}{\partial \{T\}} = \frac{\partial}{\partial \{T\}} \sum_{e=1}^E J_e[\{T\}] = \sum_{e=1}^E \frac{\partial J_e[\{T\}]}{\partial \{T\}} = \{0\}. \quad (20)$$

Дифференцирование выражений (16) – (19) по $\{T\}$ дает:

$$\frac{\partial}{\partial \{T\}} \left(\frac{1}{2} \{T\}^T [a^{(e)}]^T \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV [a^{(e)}] \{T\} \right) = [a^{(e)}]^T \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV [a^{(e)}] \{T\}; \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial \{T\}} \left(\frac{\varepsilon \sigma_0}{2} \{T\}^T [a^{(e)}]^T \int C [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS [a^{(e)}] \{T\} \right) = \varepsilon \sigma_0 [a^{(e)}]^T \int C [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS [a^{(e)}] \{T\}; \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial \{T\}} \left(\frac{\alpha_w}{2} \{T\}^T [a^{(e)}]^T \int_{S_f^{(e)}} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS [a^{(e)}] \{T\} \right) = \alpha_w [a^{(e)}]^T \int_{S_f^{(e)}} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS [a^{(e)}] \{T\}; \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \{T\}} \left(\alpha_w \int_{S_f^{(e)}} [N^{(e)}] T_f' dS [a^{(e)}] \{T\} \right) = \alpha_w [a^{(e)}]^T \int_{S_f^{(e)}} [N^{(e)}]^T T_f' dS; \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial \{T\}} \left(\alpha_w \int_{S_3^{(e)}} T_f'^2 dS \right) = \{0\}. \quad (25)$$

Окончательная система уравнений имеет вид $[K]\{T\} = \{F\}$, где

$$[K] = \sum_{e=1}^E [a^{(e)}]^T [k^{(e)}] [a^{(e)}]; \quad (27)$$

$$\{F\} = - \sum_{e=1}^E [a^{(e)}]^T \{f^{(e)}\}. \quad (28)$$

Матрицу теплопроводности $[k^{(e)}]$ и вектор нагрузки $\{f^{(e)}\}$ можно записать двумя способами.

✓ Интегралы, относящиеся к лучистому теплообмену, используются для формирования матрицы теплопроводности

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV + \alpha_w \int_{S_3^{(e)}} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS + \varepsilon \sigma_0 \int_{S_4^{(e)}} C [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS \quad (29)$$

и не используются для формирования вектора нагрузки

$$\{f^{(e)}\} = \alpha_w \int_{S_3^{(e)}} [N^{(e)}]^T T_f' dS. \quad (30)$$

В этом случае при помощи величины C и матрицы $[D^{(e)}]$ осуществляется коррекция матрицы теплопроводности $[k^{(e)}]$.

✓ Интегралы, относящиеся к лучистому теплообмену, используются для формирования вектора нагрузки

$$\{f^{(e)}\} = \varepsilon \sigma_0 \int_{S_4^{(e)}} C [N^{(e)}]^T dS + \alpha_w \int_{S_3^{(e)}} [N^{(e)}]^T T_f' dS \quad (31)$$

и не используются для формирования матрицы теплопроводности

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV + \alpha_w \int_{S_3^{(e)}} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS. \quad (32)$$

В этом случае при помощи матрицы $[D^{(e)}]$ осуществляется коррекция матрицы теплопроводности $[k^{(e)}]$, а с помощью величины C осуществляется коррекция вектора нагрузки $\{f^{(e)}\}$, причем $C = ([M^{(e)}][a^{(e)}]\{T\})^4$.

Таким образом, выполнив все предусмотренные конечно-элементной технологией процедуры и найдя искомые температуры, осуществляем коррекцию величины C и $[D^{(e)}]$. Эта процедура повторяется до получения сходимости.

Граничное условие первого рода реализуется в МКЭ путем непосредственной подстановки на каждой итерации заданного граничного условия значения температуры на соответствующие позиции в глобальный вектор узловых значений температур $\{T\}$ на стадии решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (26).

Эту систему можно решить методом сопряженных градиентов [5].

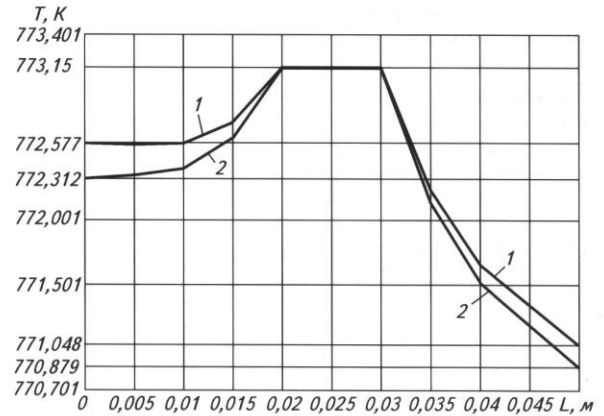


Рис. 2. Последовательное изменение распределения температуры на поверхности S_1 пластины: 1 – распределение температуры после первой итерации; 2 – распределение температуры после последней итерации; L – ширина пластины

Предположим, что пластина изготовлена из меди. Зависимость теплопроводности меди λ от температуры T представлена в таблице [4] внизу страницы.

Для построения непрерывной зависимости $\lambda = \lambda(T)$ используем интерполяцию.

Пусть $T^* = 773,15$ К; $T''_f = 283,15$ К; $T'_f = 273,15$ К; $\alpha_w = 50$ Вт/(м² · К); $\varepsilon = 0,8$.

Искомое распределение температуры по поверхности S_1 (кривая 2) показано на рис. 2.

Нелинейная трехмерная стационарная задача теплопроводности в движущейся сплошной среде

Рассмотрим ограниченный канал с текущей по нему со скоростью \vec{v} жидкостью (рис. 3). Пусть известна температура жидкости T^* на входе в канал. Протекая по каналу, жидкость отдает тепловую энергию стенкам канала. Прогреваясь, стенки канала излучают полученную от жидкости тепловую энергию в окружающую среду, имеющую температуру T''_f . Необходимо найти температуру жидкости на выходе из канала, а также установившееся при этом температурное поле в стенках канала и движущейся в нем жидкости.

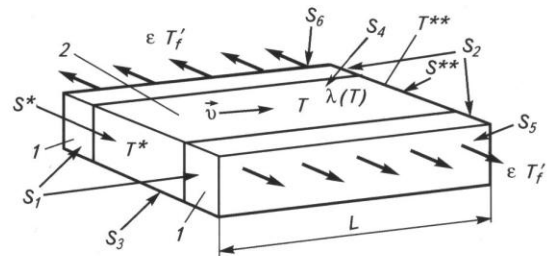


Рис. 3. Схема теплового нагружения канала: 1 – стенки канала; 2 – движущаяся жидкость; S – поверхности; T – температуры; v – скорость жидкости; $\lambda(T)$ – теплопроводность; ε – излучение; L – длина канала

T , К	273,15	373,15	473,15	573,15	673,15	773,15
λ , Вт/(м·К)	393,094	384,953	377,975	370,997	365,182	359,367

Искомое распределение температуры удовлетворяет двум уравнениям

$$\operatorname{div}(\lambda(T)\operatorname{grad}T) = 0; \quad (33)$$

$$\operatorname{div}(\lambda(T)\operatorname{grad}T) - c_p(T)\rho(T)\bar{v}\operatorname{grad}T = 0, \quad (34)$$

первое из которых относится к стенкам канала, а второе – к жидкости, движущейся со скоростью \bar{v} внутри канала.

Здесь граничные условия 1-го рода задаются на поверхностях S^* и S^{**} :

$$T|_{S^*} = T^*, \quad T|_{S^{**}} = T^{**}. \quad (35)$$

Боковые поверхности $S_1 \setminus S^*$ и $S_2 \setminus S^{**}$, а также верхняя S_3 и нижняя S_4 поверхности считаются теплоизолированными:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \right|_{S_1 \setminus S^*} = \left. \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \right|_{S_2 \setminus S^{**}} = \left. \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \right|_{S_3} = \left. \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \right|_{S_4} = 0. \quad (36)$$

На боковых поверхностях (внешних поверхностях стенок канала) S_5 и S_6 заданы условия лучистого теплообмена:

$$\begin{aligned} \lambda(T) \left. \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \right|_{S_5} &= -\varepsilon\sigma_0(T^4 - T_f^4)|_{S_5}; \\ \lambda(T) \left. \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \right|_{S_6} &= -\varepsilon\sigma_0(T^4 - T_f^4)|_{S_6}. \end{aligned} \quad (37)$$

Совокупность уравнений (33), (34) и граничных условий (35) – (37) составляют дифференциальную постановку краевой нелинейной задачи стационарной теплопроводности, в том числе в движущейся среде.

Рассматриваемая задача является нелинейной. Для ее решения также используется метод последовательных приближений. Для линеаризации задачи (33) – (37) преобразуем граничные условия (37) так, как это сделано для случая неподвижной сплошной среды, т.е. зафиксировав температуру поверхности, входящую в величину $C(T = \bar{T})$, представим лучистый поток в виде линейной функции. Фиксируя температуру в объеме канала, определяем значения $\lambda(\bar{T})$, $c_p(\bar{T})$ и $\rho(\bar{T})$ на данной итерации.

Матричные соотношения МКЭ строятся на основании эквивалентной вариационной формулировки [1, 3, 5], которая применительно к линеаризованной задаче (33) – (37) предусматривает минимизацию функционала:

$$\begin{aligned} J[T] &= \int_V \left(\frac{1}{2} (\lambda(\bar{T}) \nabla T)^2 - c_p(\bar{T})\rho(\bar{T})\bar{v}(\operatorname{grad}T) \cdot \bar{T} \right) dV + \\ &+ \frac{\varepsilon\sigma_0}{2} \int_{S_5} C(T - T_f)^2 dS + \frac{\varepsilon\sigma_0}{2} \int_{S_6} C(T - T_f)^2 dS. \end{aligned} \quad (38)$$

Температура в слабом, связанном со скоростью, также фиксируется. Далее, выполняя процедуры, аналогичные ранее описанным, а также для упрощения задачи, считая, что $T_f = 0$, соотношение (38) запишем в виде

$$\begin{aligned} J[T] &= \sum_{e=1}^E \left(\int_{V^{(e)}} \left(\frac{1}{2} \{g^{(e)}\}^T [D^{(e)}] \{g^{(e)}\} - c_p^{(e)}\rho^{(e)}\bar{v} \{g^{(e)}\} \bar{T}^{(e)} \right) dV + \right. \\ &\left. + \frac{\varepsilon\sigma_0}{2} \int_{S_5^{(e)}} C(T^{(e)})^2 dS + \frac{\varepsilon\sigma_0}{2} \int_{S_6^{(e)}} C(T^{(e)})^2 dS \right), \end{aligned} \quad (39)$$

где E – количество конечных элементов, а $C = (\bar{T}^{(e)})^3$.

В выражении (39) $c_p^{(e)}$ и $\rho^{(e)}$ представляется следующим образом:

$$c_p^{(e)} = [N^{(e)}] \{c_p^{(e)}\}; \quad (40)$$

$$\rho^{(e)} = [N^{(e)}] \{\rho^{(e)}\}, \quad (41)$$

где $\{c_p^{(e)}\}^T = [c_{p_1} \ c_{p_2} \ \dots \ c_{p_n}]$ и $\{\rho^{(e)}\}^T = [\rho_1 \ \rho_2 \ \dots \ \rho_n]$ – векторы известных узловых значений удельной теплоемкости и плотности, получаемые из зависимостей $c_p = c_p(T)$ и $\rho = \rho(T)$ при подстановке в них узловых значений температуры $\bar{T}^{(e)}$;

n – число узлов в элементе.

Вектор скорости \bar{v} представляется следующим образом:

$$\bar{v} = [v^{(e)}] = \begin{bmatrix} v_x^{(e)} \\ v_y^{(e)} \\ v_z^{(e)} \end{bmatrix};$$

$$v_x^{(e)} = [N^{(e)}] \{v_x\}; \quad v_y^{(e)} = [N^{(e)}] \{v_y\}; \quad v_z^{(e)} = [N^{(e)}] \{v_z\}, \quad (42)$$

где $\{v\}$ – вектор известных узловых значений скорости жидкости.

Интегралы по элементам в (39) записываются в виде

$$\begin{aligned} \int_{V^{(e)}} \left(\frac{1}{2} \{g^{(e)}\}^T [D^{(e)}] \{g^{(e)}\} \right) dV &= \\ = \frac{1}{2} \{T\}^T [a^{(e)}]^T \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV [a^{(e)}] \{T\}; \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon\sigma_0}{2} C \int_{S_5^{(e)}} (T^{(e)})^2 dS &= \\ = \frac{\varepsilon\sigma_0}{2} \{T\}^T [a^{(e)}]^T \int_{S_5^{(e)}} C [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS [a^{(e)}] \{T\}; \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon\sigma_0}{2} C \int_{S_6^{(e)}} (T^{(e)})^2 dS &= \\ = \frac{\varepsilon\sigma_0}{2} \{T\}^T [a^{(e)}]^T \int_{S_6^{(e)}} C [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS [a^{(e)}] \{T\}; \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \int_{V^{(e)}} (c_p^{(e)}\rho^{(e)}\bar{v} \{g^{(e)}\} \bar{T}^{(e)}) dV &= \\ = \int_{V^{(e)}} (c_p^{(e)}\rho^{(e)}C' [B^{(e)}]^T [v^{(e)}]) dV [a^{(e)}] \{T\}, \end{aligned} \quad (46)$$

где $C = C^3$;

$$C' = [N^{(e)}] [a^{(e)}] \{\bar{T}\};$$

$\{\bar{T}\}$ – глобальный вектор узловых значений температур, найденный на предыдущей итерации.

Дифференцирование величин (43) – (46) по $\{T\}$ дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \{T\}} \left(\frac{1}{2} \{T\}^T [a^{(e)}]^T \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV [a^{(e)}] \{T\} \right) &= \\ = [a^{(e)}]^T \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV [a^{(e)}] \{T\}; \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \{T\}} \left(\frac{\varepsilon\sigma_0}{2} \{T\}^T [a^{(e)}]^T \int_{S_5^{(e)}} C [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS [a^{(e)}] \{T\} \right) &= \\ = \varepsilon\sigma_0 [a^{(e)}]^T \int_{S_5^{(e)}} C [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS [a^{(e)}] \{T\}; \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \{T\}} \left(\frac{\varepsilon\sigma_0}{2} \{T\}^T [a^{(e)}]^T \int_{S_6^{(e)}} C [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS [a^{(e)}] \{T\} \right) &= \\ = \varepsilon\sigma_0 [a^{(e)}]^T \int_{S_6^{(e)}} C [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS [a^{(e)}] \{T\}; \end{aligned} \quad (49)$$

$$\frac{\partial}{\partial \{T\}} \left(\int_{V^{(e)}} \left(c_p^{(e)} \rho^{(e)} C' [B^{(e)}]^T [v^{(e)}] \right) dV [a^{(e)}] \{T\} \right) = [a^{(e)}]^T \int_{V^{(e)}} \left(c_p^{(e)} \rho^{(e)} C' [B^{(e)}]^T [v^{(e)}] \right) dV. \quad (50)$$

Окончательная система уравнений имеет вид

$$[K] \{T\} = \{F\}, \quad (51)$$

где

$$[K] = \sum_{e=1}^E [a^{(e)}]^T [k^{(e)}] [a^{(e)}], \quad (52)$$

$$\{F\} = - \sum_{e=1}^E [a^{(e)}]^T \{f^{(e)}\}. \quad (53)$$

Матрицу теплопроводности $[k^{(e)}]$ и вектор нагрузки $\{f^{(e)}\}$ здесь также можно записать двумя способами.

▼ Интегралы, относящиеся к лучистому теплообмену, используются для формирования матрицы теплопроводности

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV + \varepsilon \sigma_0 \int_{S_5^{(e)}} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS + \varepsilon \sigma_0 \int_{S_6^{(e)}} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS \quad (54)$$

и не используются для формирования вектора нагрузки

$$\{f^{(e)}\} = - \int_{V^{(e)}} \left(c_p^{(e)} \rho^{(e)} C' [B^{(e)}]^T [v^{(e)}] \right) dV. \quad (55)$$

В этом случае при помощи матрицы $[D^{(e)}]$ и величины $C = (C')^3$ осуществляется коррекция матрицы теплопроводности $[k^{(e)}]$. Вектор нагрузки $\{f^{(e)}\}$ корректируется величинами $C' = [N^{(e)}] [a^{(e)}] \{T\}$, $c_p^{(e)}$ и $\rho^{(e)}$.

▼ Интегралы, относящиеся к лучистому теплообмену, используются для формирования вектора нагрузки

$$\{f^{(e)}\} = \varepsilon \sigma_0 \int_{S_5^{(e)}} [N^{(e)}]^T dS + \varepsilon \sigma_0 \int_{S_6^{(e)}} [N^{(e)}]^T dS - \int_{V^{(e)}} \left(c_p^{(e)} \rho^{(e)} C' [B^{(e)}]^T [v^{(e)}] \right) dV \quad (56)$$

и не используются для формирования матрицы теплопроводности

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV. \quad (57)$$

В этом случае при помощи величин C , C' , $c_p^{(e)}$ и $\rho^{(e)}$ осуществляется коррекция вектора нагрузки $\{f^{(e)}\}$, причем $C = (C')^4$, а $C' = [N^{(e)}] [a^{(e)}] \{T\}$. Матрица теплопроводности корректируется только при помощи матрицы $[D^{(e)}]$.

Выполнив все предусмотренные конечно-элементной технологией процедуры и найдя искомые температуры, осуществляем коррекцию величин C , C' и $[D^{(e)}]$. Такая процедура повторяется до получения сходимости (система линейных алгебраических уравнений (51) решается методом сопряженных градиентов [5]).

Для нахождения температурного состояния в зависимости от известной температуры ядра потока на входе в канал T^* (граничные условия первого рода) производится коррекция граничных условий первого рода на выхо-

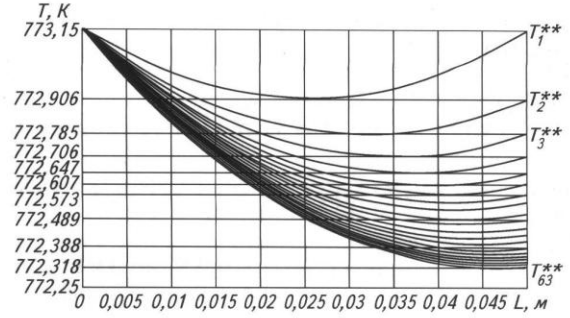


Рис. 4. Последовательное изменение распределения температуры ядра потока жидкого натрия вдоль канала длиной L при скорости течения $0,005$ м/с

де из канала T^{**} . Для этого анализируется уже рассчитанное на предыдущей итерации промежуточное температурное поле канала с целью нахождения сечения с минимальными значениями температуры. Найденные значения используем для коррекции в качестве граничного условия первого рода на выходе из канала. Эта процедура повторяется, т. е. осуществляется многократный расчет температурного состояния при фиксированной температуре жидкости на входе и корректируемой температуре на выходе из канала. Вычисления прекращаются, как только сечение с минимальной температурой совпадет с торцевой поверхностью канала на выходе.

Пусть стенки канала изготовлены из меди, а текущей по нему жидкостью является жидкий натрий. Для построения зависимости теплопроводности меди от температуры интерполируем значения, заданные таблицей на стр. 31. Зависимости от температуры теплопроводности, удельной теплоемкости и плотности натрия задаются соотношениями [2]:

$$\lambda_{Na}(T) = 90,604 - 0,048523 T;$$

$$c_{pNa}(T) = 1436,74 - 0,58049 T + (4,6229 \cdot 10^{-4}) T^2;$$

$$\rho_{Na}(T) = 949 - 0,223 T + (1,75 \cdot 10^{-5}) T^2.$$

Пусть $T^* = 773,15$ К, $T_1^{**} = 773,15$ К, $T_f' = 273,15$ К, $\bar{v} = 0,005$ м/с, $\varepsilon = 0,8$.

Распределение температуры ядра потока вдоль канала показано на рис. 4 от первого приближения (T_1^{**}) до последнего (T_{63}^{**}).

Вывод

Проведенные расчеты показывают, что конечно-элементная технология, реализованная в виде пакета прикладных программ, позволяет эффективно проводить анализ температурного состояния теплообменных поверхностей, испытывающих разнообразное тепловое нагружение.

Список литературы

1. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. — М.: Энергоатомиздат, 1983.
2. Кириллов П.Л., Юрьев Ю.С., Бобков В.П. Справочник по гидравлическим расчетам (ядерные реакторы, теплообменники, парогенераторы). — М.: Энергоатомиздат, 1984.
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. — М.: Мир, 1979.
4. Филинов С.А., Фиргер И.В. Справочник термиста. — Л.: Машиностроение, 1975.
5. Шабров Н.Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей. — Л.: Машиностроение, 1983.