

Конвективный теплообмен при совместном действии вынужденной и свободной конвекции и изменяющихся во времени граничных условиях на стенке*

А. С. УСТИНОВ, д-р техн. наук И. К. САВИН

Петрозаводский государственный университет

The paper proposes an approach of heat transfer calculation for nonsteady state liquid flow and boundary condition on the wall changing time-dependently, both these factors acting jointly.

Как известно, режим движения жидкости может быть ламинарным или турбулентным. Тurbулентный поток характеризуется неупорядоченностью, которая приводит к случайному изменению во времени и пространстве мгновенных значений скоро́сти, температуры, давления и т. д. Отдельные частицы движутся в турбулентном потоке со своими скоро́стями, отличными по значению и направлению. Условно турбулентное движение можно рассматривать в виде движения совокупности отдельных объемов — турбулентных вихрей, совершающих как поступательное, так и вращательное движение.

Для математического описания турбулентного движения жидкости используется предложенный Рейнольдсом метод, состоящий в том, что мгновенные значения скоро́сти w , температуры T , давления p представлены в виде средних \bar{w} , \bar{T} , \bar{p} и пульсационных w' , T' , p' :

$$w = \bar{w} + w'; \quad (1)$$

$$T = \bar{T} + T'; \quad (2)$$

$$p = \bar{p} + p'. \quad (3)$$

Рассматривается общий случай течения и теплообмена (рис. 1), когда в потоке среды, обусловленном действием внешних поверхностных сил, приложенных извне, вследствие гравитационного движения возникает свободная конвекция [1; 2].

В этом случае движение потока является результатом взаимодействия вынужденной и свободной конвекции.

Предполагаем, что в любой точке потока в любой момент времени вектор скоро́сти потока направлен параллельно оси y . Следовательно

$$w_x = w_z = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

Тогда уравнение движения примет вид

$$\frac{\partial w_y}{\partial \tau} - \nu \nabla^2 w_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad (6)$$

так же:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Течение потока в условиях теплообмена может существенно отличаться от изотермического.

Если во входном сечении задано некоторое распределение скоро́сти, то по мере удаления от входа под действием сил вязкости профиль скоро́сти стремится принять форму, соответствующую стабилизированному течению.

Далее приводится постановка задачи о нестационарном движении потока и анализ нестационарного процесса теплообмена.

Физические свойства вещества постоянны.

Конвективный теплообмен поверхности ограждения и потока воздуха с источниками тепла в потоке при нестационарном режиме:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q_v}{\rho c_p}, \quad \tau = 0, \quad T = T_h; \quad (8a)$$

$$\frac{\partial w_y}{\partial \tau} - \nu \nabla^2 w_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \tau = 0, \quad w_y = w_y(x, z), \quad (8b)$$

где w — скоро́сть, м/с;

q_v — объемная удельная мощность внутренних источников теплоты, Вт/м³;

C_p — изобарная теплоемкость, Дж/(кг·К);

ν — кинематическая вязкость среды, м²/с;

T_{fi} — температура i -ой среды ($i = 1, 2, \dots, n$), К.

Изменение плотности от температуры зависит линейно и учитывается в уравнении движения (8б) при подъемной силе.

Вблизи стенки выполняется условие

* Проведение НИР в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

$\frac{\partial T}{\partial y} > 0$,
ось y совпадает с направлением вектора скорости.

Нестационарность процесса теплообмена на внутренней стенке обусловлена изменением температуры стенки. Температуры среды и стенки одинаковы и равны температуре наружной температуре $T = T_{wi} = T_0 = T_n$.

В начальный момент времени температура стенки начинает изменяться и принимает новые значения.

При переходе к безразмерным величинам, уравнение энергии (8а) приобретает вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial \text{Fo}^*} + \frac{2}{3} W_y \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}; \\ \tau = 0; \quad T = T_{wi} = T_0 = T_n; \quad \theta(X, Y, 0) = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где Fo^* — число Фурье.

Границные условия для системы (9):

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=0} = 0; \\ \theta(\pm 1, Y, \text{Fo}^*) = 1; \\ \theta(X, 0, \text{Fo}^*) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь

$$\theta = \frac{T - T_{w(n+1)}}{T_{w(n+1)} - T_0} \text{ — безразмерная температура;}$$

$\text{Fo}^* = \frac{a^* \tau}{(x^*)^2}$ — безразмерное время для подвижной среды;

$$X = \frac{x^*}{x^{**}} \text{ — безразмерная координата;}$$

$$Y = \frac{8}{3} \frac{1}{\text{Pe}} \frac{y}{2x^{**}} \text{ — безразмерная координата;}$$

$$\text{Pe} = \frac{wx^{**}}{a^*} \text{ — число Пекле;}$$

a^* — коэффициент температуропроводности среды, m^2/c ;

x^* — линейный размер, м;

x^{**} — ширина, м.

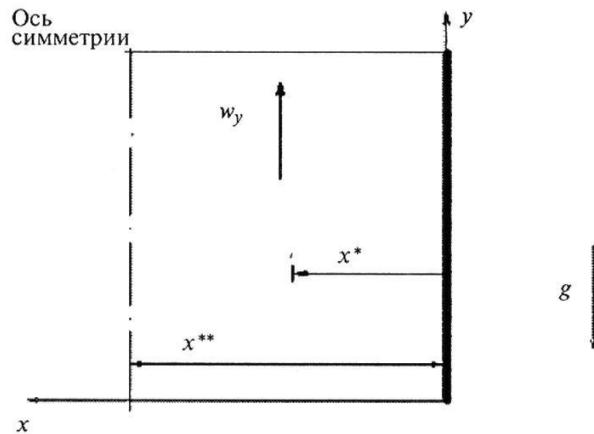


Рис. 1. К задаче о течении и теплообмене в плоской трубе при совместном действии вынужденной и свободной конвекции

Решение этой задачи имеет вид:

$$\theta = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} b_{n0} \psi_n(X) H_n(Y, \text{Fo}^*). \quad (11)$$

Здесь для малых чисел Fo^*

$$H_n = \exp(-\zeta_n \text{Fo}^*); \quad (12)$$

для больших чисел Fo^*

$$H_n = \exp(-\eta_n \text{Fo}^*). \quad (13)$$

Каждая собственная функция представляет ряд по косинусам:

$$\psi_n = \sum_{m=0}^4 \sum_{n=0}^4 \frac{b_{nm}}{b_{n0}} \cos(E_m X), \quad (14)$$

$$\text{где } E_m = \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi;$$

$m = 0, 1, 2, 3, 4$; $n = 0, 1, 2, 3, 4$ — количество слагаемых ряда (14).

Значения b_{n0} ; b_{nm}/b_{n0} ; ζ_n ; η_n приведены в таблице.

Значение постоянных b_{n0} ; b_{nm}/b_{n0} ; ζ_n ; η_n в задаче о нестационарном теплообмене

n	b_{n3}/b_{n0}	b_{n4}/b_{n0}	ζ_n	η_n
0	$0,207037 \cdot 10^3$	$-0,586707 \cdot 10^{-4}$	2,30858	2,82948
1	0,0230766	-0,00930795	11,9441	32,3656
2	3,31526	0,101483	24,9156	95,2824
3	-12,0113	-7,12402	37,4292	178,074
4	-11,0745	13,7624	92,5592	608,811
n	b_{n0}	b_{n1}/b_{n0}	b_{n2}/b_{n0}	
0	1,17776	0,0211834	-0,0013896	
1	0,0579815	-5,37195	-0,838971	
2	0,0165696	-4,00649	9,45808	
3	0,00706883	-3,59673	7,94700	
4	0,0138607	-3,32432	6,61879	

С учетом $w_y = w_y(x, z, \tau)$; $p = p(y, \tau)$ следует, что градиент давления не зависит от координаты и может быть задан функцией по времени

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = f(\tau). \quad (15)$$

В случае вязкостно-гравитационного течения уравнение движения (8б) имеет вид:

$$\beta_\rho g \vartheta - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \right) + \nu \frac{\partial^2 W_y}{\partial x^2} = 0. \quad (16)$$

Здесь

$\vartheta = T - T_{w(n+1)}$ — разность температур, К;

$W_y = \frac{w_y}{\bar{w}}$ — скорость в безразмерной форме;

$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ — коэффициент объемного расширения жидкости.

Начальные и граничные условия для уравнения движения (16):

$$\begin{cases} w_y = w_0(y, z); & \tau = 0 \\ x^* = 0; & \vartheta = 0; & w_y = 0 \\ w_y = w_y(x^*); & w_x = 0; & \vartheta = T - T_{w(n+1)} \\ x = x^*; & \frac{d \vartheta}{d x} = 0; & \frac{d w_y}{d x} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Осуществляется течение потока со средней по сечению скоростью

$$\bar{w}_1 = -\frac{(x^{**})^2}{3\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_1; \quad (18)$$

где $-\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_1$ — постоянный по времени градиент давления;

μ — динамический коэффициент вязкости, Па·с.

В начальный момент времени ($\tau = 0$) градиент давления изменяется и принимает другое значение $-\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_2$.

Новый режим характеризуется средней скоростью

$$\bar{w}_2 = -\frac{(x^{**})^2}{3\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_2. \quad (19)$$

В рассматриваемых условиях нестационарное распределение скорости выражается уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{w_y}{\bar{w}_2} = & \frac{3}{2} (1 - X^2) - 6 \left(1 - \frac{\bar{w}_1}{\bar{w}_2} \right) \times \\ & \times \sum_i^{\infty} \frac{(-1)^i}{E_i^3} \cos(E_i Y) \exp(-E_i^2 Zh), \end{aligned} \quad (20)$$

где $E_i = \left(i + \frac{1}{2} \right) \pi$;

$Zh = \frac{\nu \tau}{(x^{**})^2}$ — число Жуковского.

Уравнение (20) справедливо для всех случаев изменения градиента давления, включая случаи, когда $\bar{w}_1 = 0$, т. е. начальный градиент давления равен нулю и среда неподвижна, и $\bar{w}_2 = 0$, т. е. градиент давления падает до нуля. Средняя скорость по сечению после интегрирования уравнения (21) по X в пределах от 0 до 1:

$$\frac{\bar{w} - \bar{w}_2}{\bar{w}_1 - \bar{w}_2} = 6 \sum_i^{\infty} \frac{(-1)^i}{E_i^4} \exp(-E_i^2 Zh). \quad (21)$$

Список литературы

1. Петухов Б. С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. — М.: Энергия, 1967.

2. Самарский А. А., Вабищев П. Н. Вычислительная теплопередача. — М.: Едитореал УРСС, 2003.