

# Асимптотическая модель гистерезиса и ее приложение к вычислению термодинамических параметров сегнетоэлектрических материалов\*

Канд. физ.-мат. наук А. С. СТАРКОВ, канд. техн. наук О. В. ПАХОМОВ

Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий

*Studying electrocaloric effect (ECE) in ferroelectrics is interesting both for fundamental investigations and for engineering applications and for adequate description of thermodynamic thermal physical parameters of ferroelectric films. The present paper introduces a theoretical approach developed on the basis of Landau-Chalatnikov model that allows describing not only the presence of dynamic spontaneous polarization but also its influence on the character of temperature dependence of EC-effect.*

## Введение

В последнее время в ряде ведущих научных лабораторий мира ведутся интенсивные исследования магнито- и электрокалорического эффектов с целью создания твердотельного охладителя на ферромагнитных и сегнетоэлектрических материалах. Следует отметить, что впервые термодинамический цикл сегнетоэлектрического преобразователя был рассмотрен в работах В. В. Сычева. Разработка и исследование охладителя на данном принципе требует не только инженерно-конструкторских решений, но и глубокой проработки вопросов термодинамики рабочих процессов в твердом теле, использования уравнения термодинамического состояния, а также расчета и измерения термодинамических и теплофизических параметров рабочего тела. К таким параметрам относятся: энталпия, теплоемкость, теплопроводность и т. д. Причем термодинамические параметры и величины в данном случае имеют свои особенности. Например, наряду с обычными изобарной и изохорной теплоемкостями здесь также необходимо знать теплоемкость при постоянной поляризации, теплоемкость при постоянной индукции и теплоемкость при постоянной напряженности электрического поля, которые могут быть получены только из экспериментов. Аналогично термодинамическим процессам в газах, где в качестве параметров состояния выбираются температура, давление и объем, для

сегнетоэлектриков соответственно используются следующие параметры — температура, напряженность и поляризация.

Современная экспериментальная техника позволяет проводить динамическое измерение поляризации сегнетоэлектрика при различных температурах как функцию изменяющегося во времени напряжения, подаваемого на сегнетоэлектрик. Причем для адекватного описания важно знать, в каких случаях будет достаточно пользоваться квазистатическим приближением для изменения состояния термодинамической системы, а в каких — необходимо учитывать динамические эффекты. При корректной постановке и правильном решении данной задачи могут быть проведены экспериментальные исследования и получены новые данные по термодинамическим свойствам материала, используемого для охладителей.

Настоящая работа направлена на создание такой методологии, которая позволит с высокой точностью по результатам динамических электрофизических измерений получить термодинамические параметры сегнетоэлектриков с помощью современного математического аппарата.

Основной характеристикой сегнетоэлектриков является зависимость поляризации от приложенного электрического поля  $P(E)$ , которая носит ярко выраженный нелинейный характер, проявляющийся в наличии гистерезиса. Проведенные в последнее время эксперименты [1–9] показали существенную зависимость кривых гистерезиса от частоты электрического поля. В частности, с увеличением частоты поля увеличиваются коэрцитивная сила и площадь петли гистерезиса. Так как уравнения Ландау–Халатникова не имеют аналитического

\*Данная работа выполнена в рамках Государственной аналитической программы «Развитие потенциала высшей школы 2009–2010». Раздел: «Проведение фундаментальных исследований в области технических наук». Регистрационный номер 2.1.2/5063.

решения, то в ряде работ были предложены различные модификации исходного уравнения [10] для лучшего согласования с имеющимися экспериментальными данными. В данной работе предлагается использовать асимптотические методы теории дифференциальных уравнений [11], причем малым параметром при таком подходе является отношение характерного времени релаксации поляризации к периоду колебаний напряженности электрического поля. Данный подход позволяет получить приближенные формулы для исследуемых величин.

Изложение метода ведется для уравнения Ландау–Халатникова, однако полученные результаты легко могут быть обобщены на случай уравнения из более широкого класса

$$\alpha \frac{dP}{dt} = f(P, E(t), t)$$

с произвольной функцией  $f(P, E(t), t)$ .

### Использование уравнения Ландау–Халатникова для описания неустановившегося состояния

В обычных диэлектриках поляризация пропорциональна напряженности электрического поля  $P = \chi E$ , где  $\chi$  — диэлектрическая восприимчивость. Для учета релаксации поляризации Дебаем было предложено уравнение

$$\alpha \frac{dP}{dt} = -\frac{L}{T}(P - \chi E), \quad (1)$$

где  $L, \alpha > 0$  — феноменологические коэффициенты;  $T$  — абсолютная температура.

Для сегнетоэлектриков зависимость между поляризацией  $P$  и напряженностью поля  $E$ , согласно модели Гинзбурга–Ландау, является полиномиальной

$$E = aP + bP^3, \quad (2)$$

где  $a = a_0(T - T_C)$ ;

$a_0, b$  — постоянные;

$T_C$  — температура Кюри.

В этом случае для учета процесса релаксации используется уравнение Ландау–Халатникова

$$\alpha \frac{dP}{dt} = E - aP - bP^3. \quad (3)$$

Следуя принципам термодинамики неравновесных процессов, можно показать, что уравнение (3) есть обобщение уравнения (2) на случай неустановившегося состояния. Физическая же интерпретация сводится к следующему — поскольку изменение поляризации эквивалентно наличию тока —

$$j_P = \alpha \frac{dP}{dt},$$

то этот ток приводит к появлению динамической напряженности поля  $E_{dyn} = \alpha j_P$ , где  $\alpha$  — «внутреннее сопротивление».

При дальнейшем анализе будем считать, что напряженность электрического поля изменяется по гармоническому закону  $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$ , где  $E_0$  — амплитуда,  $\omega$  — частота.

Из линеаризованной модели определим величину

$$t_{ch} = \frac{\alpha}{|a|}$$

как характерное время релаксации для уравнения (3).

Так как основным допущением в данной работе является предположение о малости характерного времени релаксации  $t_{ch}$  по сравнению с периодом колебаний напряженности электрического поля  $\omega t_{ch} \ll 1$ , то цель нашего анализа — исследование зависимости  $P(E(t))$  при наличии малого параметра  $s = \omega t_{ch}$ .

### Поправка к квазистатическому приближению описания гистерезисной кривой

Перепишем уравнение (3) в безразмерном виде

$$sy' = -\text{sign}(a)y - y^3 + e_0 \sin(x), \quad (4)$$

где

$$y = \frac{P}{P_S}, \quad P_S = \sqrt{\frac{|a|}{b}}, \quad e_0 = \frac{E_0}{|a|} \sqrt{\frac{b}{|a|}}, \quad x = \omega t.$$

В выражении (4)  $y'$  — производная по  $x$  или  $y' = dy/dx$ . Параметр  $P_S$  при условии  $a < 0$  соответствует величине спонтанной поляризации.

Важно отметить, что поскольку вид уравнения (4) различен для случаев  $T > T_C$  и  $T < T_C$  из-за изменения знака параметра  $a$ , то уравнение (4) не может быть использовано для описания петли гистерезиса вблизи точки Кюри, так как в этом случае наряду с используемым при анализе малым параметром  $s$  появляется второй малый параметр  $a$ , конкурирующий с параметром  $s$ .

Ввиду того, что для установившегося режима роль начальных условий не существенна, то решение уравнения (4) будем отыскивать в виде ряда по степеням малого параметра  $s$  в виде

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(x)s^i. \quad (5)$$

Подставим ряд (5) в уравнение (4) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра  $s$ . Далее, находя главное приближение нашего решения по параметру  $s$ , объединим члены, не содержащие  $s$ . В результате для определения первого члена ряда (5) —  $y_0$ , мы получим следующее уравнение:

$$\text{sign}(a)y_0 + y_0^3 - e_0 \sin(x) = 0. \quad (6)$$

Отсюда следует, что  $y_0$  — есть один из корней кубического уравнения Гинзбурга–Ландау (2) для квазистатического случая. Приравнивая коэффициенты при параметре  $s^1$ , получаем для  $y_1$  уравнение

$$y'_0 = -(\text{sign}(a) + 3y_0^2)y_1.$$

Откуда легко находим

$$y_1 = -\frac{y'_0}{\text{sign}(a) + 3y_0^2}.$$

Аналогично, в результате приравнивания коэффициентов при любом  $s^i$  имеем уравнение для  $y_i$  в общем виде

$$(\text{sign}(a) + 3y_0^2)y_i = F_i(y_0, y_1, \dots, y_{i-1}).$$

Правая часть данного уравнения зависит только от коэффициентов при малом параметре  $s$  ряда (5) с номерами меньшими, чем  $i$ , что позволяет рекуррентным образом определить коэффициент ряда (5) —  $y_i$  с произвольным номером  $i$ .

Если ограничиться в найденном решении задачи только первыми двумя членами ряда (5) и учесть тождество, получаемое при дифференцировании (6),

$$y'_0 = \frac{e_0 \cos(x)}{\text{sign}(a) + 3y_0},$$

то получим следующую приближенную формулу для поляризации:

$$P(t) \approx P_0(t) - \frac{\omega \alpha e_0 \cos(\omega t)}{(a + 3bP_0^2)^2}. \quad (7)$$

Для случая общего уравнения квазистатическое приближение с первой поправкой будет иметь вид

$$P(t) \approx P_0 + \alpha \frac{\frac{\partial P_0}{\partial t}}{\frac{\partial F(P_0, E(t), t)}{\partial P}}. \quad (8)$$

Представленный подход позволяет по формуле (7) описать наличие гистерезиса в парафазе при  $T > T_C$  (рис. 1) по данным работы [12].

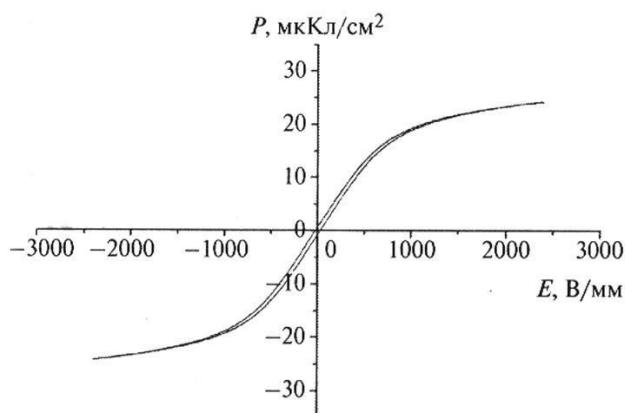


Рис. 1. Гистерезис в парафазе для керамики  $Pb(Mg_{1/3}Nb_{2/3})O_3PbTiO_3$

Точки пересечения с осями на графике соответствуют следующим значениям переменной:

$$x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \pi, \quad x = \frac{3\pi}{2}.$$

При данном значении  $E \sim \sin(x)$  существует только одно значение статической поляризации и два таких значения динамической поляризации, которые, во-первых, соответствуют одному и тому же значению  $E \sim \sin(x)$ , а во-вторых, имеют различные знаки. Поскольку по формуле (7) разность между верхней и нижней ординатами петли гистерезиса равна  $-\frac{\omega \alpha e_0 \cos(\omega t)}{(a + 3bP_0^2)^2}$ , то по экспериментальным данным может быть определен параметр уравнения Ландау—Халатникова —  $\alpha$ . Для этого обозначим в качестве  $P_u$  и  $P_d$  значения поляризации при  $E = 0$ , что соответствует точкам пересечения на гистерезисной кривой. Тогда, учитывая, что в данном случае  $P_0 = 0$ , получим для вычисления  $\alpha$  простое выражение

$$\alpha = \frac{(P_u - P_d)a^2}{2\omega e_0}.$$

### Асимптотическое исследование первой перестройки на гистерезисной кривой

Как было показано ранее, каждый последующий коэффициент в ряду (5) получается при делении некоторого выражения на  $(\text{sign}(a) + 3y_0^2)$ , поэтому условием применимости использования разложения (5) для уравнения (4) при  $S \rightarrow 0$  является

$$(\text{sign}(a) + 3y_0^2) > \text{const} > 0. \quad (9)$$

В парафазе при  $T > T_C$  условие (9) выполняется всегда, а при  $T < T_C$  для  $y_0^2 = 1/3$  знаменатель обращается в ноль, что приводит к неприменимости разложения (5).

В общем случае особая точка, в которой происходит перестройка разложения (5), определяется следующим условием:

$$\frac{\partial F(P_0, E(t), t)}{\partial P} = 0$$

или наличием кратного корня  $u$  для квазистатического уравнения (6). В этом случае исходное решение теряет свою устойчивость и переходит к другому устойчивому решению.

В дальнейшем будем рассматривать только сегнетофаузу. Типичный график зависимости  $P(E)$  при  $T < T_C$  представлен на рис. 2.

Будем исследовать только ту часть кривой, которая отвечает условию при

$$x \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right],$$

т. е. только верхнюю половину графика от начальной точки до некоторой окрестности точки, характерным отличием которой является наличие кратного корня  $u$  для квазистатического уравнения (6).

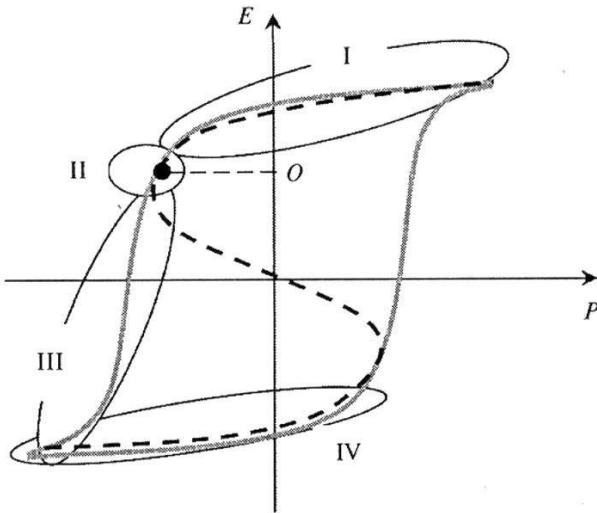


Рис. 2. График зависимости поляризации сегнетоэлектрика  $P$  от изменения напряженности электрического поля  $E$  при температуре выше критической

Поскольку эта первая часть кривой гистерезиса I является квазистатической, то для данной области значений  $P(E)$  справедливо приближение (7).

Вторая часть II — это та окрестность точки  $W$ , где происходит первая перестройка решения, но новое решение еще близко к квазистатическому.

Третья часть III включает в себя окрестность точки  $W$  и переход к другому устойчивому корню квазистатического уравнения.

Четвертая часть IV так же, как и первая часть является квазистатической, но она проходит вблизи другой ветви стационарной кривой. Здесь важно отметить, что участки I и II кривой гистерезиса рис. 2 отличаются разными временными масштабами.

Рассмотрим перестройку решения, происходящую вблизи особой точки  $W$ , причем будем ограничиваться только главными слагаемыми при  $S \rightarrow 0$  в асимптотическом разложении для  $P$ . Если в момент времени  $x_0$  уравнение (6) имеет кратный корень, то тогда

$$y_0(x_0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad e_0 \sin(x) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Далее, разложив  $\sin(x)$  в ряд по степеням  $(x - x_0)$ , в результате получим, что при малых  $(x - x_0) < 0$  справедливо разложение

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ 1 + \sqrt{3}q(x - x_0) + \dots \right], \quad (10)$$

где многоточием обозначены слагаемые порядка  $(x - x_0)$  и более высоких степеней, а  $q = e_0 \cos(x_0) < 0$  есть основной параметр данной перестройки.

Из разложения (10) следует, что производную по времени нельзя считать малой величиной, и для ее учета

необходимо ввести растянутое время  $\xi$  и новую неизвестную функцию  $\eta$  в соответствии с формулами

$$x - x_0 = \sqrt{3}s^{\frac{1}{3}}\xi, \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + \eta s^{\frac{1}{3}}). \quad (11)$$

Так как при дальнейшем анализе нами рассматриваются времена, мало отличающиеся от времени перестройки  $x_0$ , то переменную  $\xi$  будем считать ограниченной величиной. Масштабы растяжения (11) выбраны из условия, что производная по растянутому времени и главные слагаемые при  $(x - x_0)$  в правой части (4) имели бы один и тот же порядок малости.

Неизвестную функцию  $\eta$  ищем в виде ряда Пюизо по дробным степеням малого параметра  $s$

$$\eta = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j(x)s^{\frac{j}{3}}. \quad (12)$$

Тогда, подставив уравнения (11) и (12) в (4) и, привав коэффициенты при одинаковых степенях  $s^{j/3}$ , получим рекуррентную систему уравнений для определения коэффициентов  $\eta_j(\xi)$ .

Приравняв слагаемые, содержащие  $s^{1/3}$ , получим уравнение

$$\frac{d\eta_0}{d\xi} = -\eta_0^2 + q\xi. \quad (13)$$

Данное уравнение есть уравнение Рикатти. Подстановкой

$$\eta = \frac{z'}{z}$$

оно сводится к уравнению Эйри

$$z'' = q\xi z. \quad (14)$$

Общее решение уравнения (14) имеет вид

$$z = C_1 v(q^{1/3}\xi) + C_2 u(q^{1/3}\xi), \quad (15)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные, а  $v(r)$  и  $u(r)$  — функции Эйри в определении В. А. Фока, которые задаются своими асимптотиками при  $r \rightarrow +\infty$ ,

$$v(r) \sim \frac{1}{r^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}r^{3/2}\right)(1 + O(r^{-3/2})), \quad (16)$$

$$u(r) \sim \frac{1}{r^{1/4}} \exp\left(+\frac{2}{3}r^{3/2}\right)(1 + O(r^{-3/2})). \quad (17)$$

Потребуем, чтобы при  $\xi \rightarrow +\infty$  функция  $\eta_0$  имела бы асимптотику  $\eta_0 = (\sqrt{q\xi} + \dots)$ , вытекающую из разложения (10), причем эта асимптотика была бы справедлива не только для действительных значений  $\xi$ , но и для некоторого сектора комплексной плоскости  $\xi$ :  $|\arg(\xi)| \leq \frac{\pi}{3}$ . Изданного требования следует, что  $C_1 = 0$ , а постоянную  $C_2$  положим равной единице. Следовательно, в окрестности точки  $W$  главный член разложения (12) имеет вид

$$\eta_0 = q^{1/3} \frac{u'(q^{1/3}\xi)}{u(q^{1/3}\xi)}. \quad (18)$$

## Асимптотическое исследование второй перестройки на гистерезисной кривой

Полученная нами асимптотика (12), (18) позволяет несколько отойти от точки  $W$ , но в силу того, что функция Эйри  $u(r)$  имеет бесконечное множество отрицательных корней, наименьший по абсолютной величине из которых есть  $r_1 = 1,174$ , то сразу за точкой  $W$  на кривой начинается вторая перестройка решения. Главный член разложения (12) при приближении к особой точке  $\xi \rightarrow \xi_0 = \frac{r_1}{q^{1/3}}$  имеет асимптотику

$$\eta_0 \sim \frac{1}{\xi - \xi_0}. \quad (19)$$

Точное уравнение для  $\delta y = \sqrt{3}(y - \frac{1}{\sqrt{3}})$  вблизи точки  $x = x_0$  имеет вид

$$\sqrt{3}S\delta y' = -(\delta y)^2 - \frac{(\delta y)^3}{3} + q(x - x_0). \quad (20)$$

До точки  $W$  мы пренебрегали левой частью уравнения (20), и поскольку в окрестности точки  $W$  малой величиной была  $\delta y$ , в этой окрестности мы отбрасывали второе слагаемое в правой части. За точкой  $W$  величина  $\delta y$  будет возрастать, и малой величиной в этом случае становится третье слагаемое. Здесь следует отметить, что, используя уравнение (20), возможно обойтись одной перестройкой, однако поскольку явное решение уравнения (20) отсутствует, то мы проводим две перестройки на основе известных функций.

Введем еще одно растянутое время и переменную

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{3} \frac{(x - x_1)}{S}, \quad x_1 = x_0 + \sqrt{3}S^{\frac{1}{3}}\xi_0, \quad \delta = \\ &\sqrt{3} \left( y - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

и далее будем отыскивать функцию  $\delta$  в виде ряда  $\delta = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j(\tau)s^{\frac{j}{3}}$ .

Для первого члена ряда получим дифференциальное уравнение

$$\delta'_0 = \delta_0^2 - \frac{\delta_0^3}{3}.$$

Общий интеграл данного уравнения имеет вид

$$\frac{1}{3} \ln \left| \frac{\delta_0 + 3}{\delta_0} \right| - \frac{1}{\delta_0} = C - \tau. \quad (21)$$

Для малых значений  $\delta_0$  можно пренебречь логарифмом в левой части уравнения (21), тогда находим следующую асимптотику:

$$\delta_0 \sim \frac{1}{\tau - C} + \dots \quad (22)$$

Данная асимптотика (22) переходит в (19) при  $C = 0$ . Таким образом, окончательно получим, что поляризация в области III на кривой гистерезиса может быть описана следующим неявным уравнением:

$$\tau = \frac{1}{\delta_0} + \frac{1}{3} \ln \left( \left| \frac{\delta_0}{\delta_0 + 3} \right| \right). \quad (23)$$

При больших значениях  $\tau$  уравнение (23) может быть решено приближенно в виде

$$\delta_0 = -3(1 + e^{-3(\tau + \frac{1}{3})} + 0(e^{-3\tau})). \quad (24)$$

Выражение (24) описывает приближение к устойчивому решению  $\delta_0 = -3$ , которое происходит по экспоненциальному закону.

Таким образом, на участке I кривой гистерезиса применимо квазистатическое приближение (7), и решение мало отличается от статического. В окрестности точки  $W$  происходит первая перестройка, и решение от квазистатического вида переходит в уравнение (18), которое содержит функции Эйри. Далее за точкой  $W$  в области III происходит изменение характерного времени, для сегнетоэлектрика имеет место быстрый переход от устойчивого прежнего решения к новому устойчивому решению, которое описывается неявной зависимостью (23). Причем, как показывает формула (24), это же решение переходит в устойчивое решение и для области IV. Далее процесс повторяется по всем участкам гистерезисной кривой сегнетоэлектрика и может быть полностью описан с помощью рассмотренной асимптотической модели.

Представленный в настоящей работе теоретический подход, основанный на модели Ландау–Халатникова, показывает, что для адекватного описания электрокалорического эффекта или изменения температуры сегнетоэлектрика в переменном электрическом поле необходимо, согласно выражению (6), использовать временную зависимость для поляризации. Использование же квазистатической модели в данном случае является, по нашему мнению, некорректным и приводит к ошибочным результатам.

Данное теоретическое положение подтверждается следующими экспериментальными исследованиями. Обычно для расчета электрокалорического эффекта используется формула

$$\Delta T = -T \int_{E_I}^{E_F} \frac{1}{\rho C_E} \frac{dP}{dT} dE,$$

которая получена в квазистатическом приближении, в ней используется статическая поляризация  $P_0$ .

Следовательно, при подстановке в формулу (1) вместо  $P_0$  динамической поляризации  $P_1 = P_{dyn}$  будет получено завышенное значение величины электрокалорического эффекта, как, например, в работе [2], причем максимум ЭК-эффекта в этом случае будет смещаться в сторону увеличения температуры.

Этот факт был установлен в работе [12], где разность результатов, полученных расчетным путем через  $P_{Dyn}$  и экспериментальным путем, оценивалась в 15–20 % в зависимости от температуры.

На рис. 3 представлена типичная зависимость изменения температуры  $\Delta T$  при электрокалорическом эффекте для керамики  $Pb(Mg_{1/3}Nb_{2/3})O_3PbTiO_3$  от температуры  $T$  по данным работы [12].

Кривая 2 получена авторами путем пересчета температурной зависимости спонтанной поляризации, а кривая 1 — из измерения  $\Delta T$  при электрокалорическом эффекте для данной керамики [12].

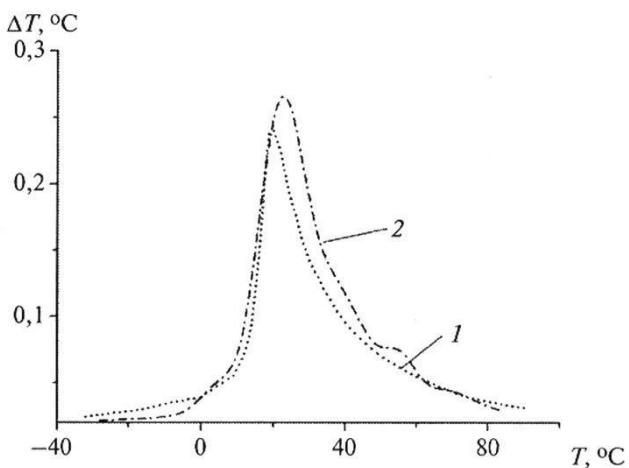


Рис. 3. Температурная зависимость электрокалорического эффекта  $\Delta T$  для керамики  $Pb(Mg_{1/3}Nb_{2/3})O_3PbTiO_3$

## Список литературы

1. Bret Neese, et all. Electrocaloric Effect of the relaxor ferroelectric in poly (vinylidene-fluoride-trifluoroethylene-chlorofluoroethylene) terpolymer // Appl. Phys. Lett. 94, 042910 (2009).
2. Mischenko A. S., Zhang Q., Scott J. F., Whatmore R. W., Marhur N. D. Science 311, 1270 (2006).
3. Guyomar D., Sebald G., Guiffard B., Seveyrat L. J. Physics D // Appl. Phys. 39, 4491 (2006).
4. Старков А. С., Карманенко С. Ф., Пахомов О. В., Еськов А. В., Семикин Д., Hagberg J. Электрокалорический отклик сегнетоэлектрика на воздействие периодического электрического поля // ФТТ. 2009. Т. 51. Вып. 7.
5. Qiu J. H. and Jiang Q. Grain size effect on the electrocaloric effect of dense  $BaTiO_3$  nanoceramics // Appl. Phys. 105, 034110 (2009).
6. Akcay G., Alpay S. P., Mantese J. V., Rossetti G. A. // Appl. Phys Lett. 90, 252909 (2007).
7. Marvan M., Jonscher A. K., Fahnrich J. // J. of the Europ. Ceramic Society. 21, 1345 (2001).
8. Karmanenko S. F., Pakhomov O. V., Prudan A. M., Starkov A. S., Es'kov A. V. // J. of the Europ. Ceramic Society. 27, 3109 (2007).
9. Пахомов О. В., Старков А. С., Карманенко С. Ф., Еськов А. В. // Вестник МАХ. 2007. Вып. 2, 3.
10. Ландау Л. Д., Халатников И. М. // ДАН СССР 96, 469. 1954.
11. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. — М.: Наука, 1975.
12. Hagberg J., Uusimaki A. and Jantunen H. // Appl. Phys. Lett. 92, 132909 (2008).