

Бимерное адиабатическое смерзание сферических гранул льда

П.В. МИРОШНИКОВ, д-р техн. наук В.И. ПОЛТАВЦЕВ
 Кемеровский государственный сельскохозяйственный институт,
 канд. физ.-мат. наук В.В. РАГУЛИН
 Кемеровский государственный университет

River ice crossing building are very actually in the Siberia and to the North of the «TRANSIB». Fast freezing of river ice crossing is possible on the basis of process of adiabatic freezing a lot of ice granules together in ice water. We research kinetics of freezing of bi-granule (a couple of ice balls contacting each other). The process is accompanied with fast growing crosspiece between the balls and dynamic changing form of borders of the bi-granule. The article presented description of kinetics, mathematic two-measure (in view of axial symmetry in cylindrical co-ordinates) model of the process as the Stephan problem and experiments. We found correlations between mass and some geometric parameters (form, angle and radius of curve of slot) of freezing couple from freezing time etc.

Бездорожье в России в зимнее время на территориях севернее Транссиба заставляет строить ледовые переправы. Наиболее быстрым способом строительства является замораживание слоя мелкодробленого льда, залитого водой. При этом гранулы льда, смыкаясь боковыми гранями, удерживают воздушные пузыри, что приводит к понижению прочности замерзшего ледяного слоя. Нами применен кипящий слой для получения гранул льда сферической формы, которые не удерживают воздух при заливании гранулята водой [1].

В данной статье рассматривается элементарный акт адиабатического смерзания двух ледяных шаров с целью определения его кинетических характеристик и последующего построения обобщенной модели для всего слоя.

В работах [1,2] показано, что охлажденная сферическая гранула льда адиабатически намораживает на своей поверхности слой льда, движение наружной границы которого соответствует условиям одномерной однофазной задачи Стефана [3, 4, 6].

Решение одномерной задачи Стефана с использованием уравнения теплового баланса для пластины впервые получено Р.Планком и определяет время t замораживания слоя льда при постоянных значениях его физических параметров [5]. При этом полагают, что температура воды постоянна (0°C), теплоемкость льда нулевая, льдообразование происходит без переохлаждения (при 0°C), коэффициент теплопроводности и удельная теплоемкость льда не зависят от его температуры.

«Бимерная гранула льда», или кратко «бигранула», — условное обозначение тела из пары соприкасающихся ледяных шаров в виде объемной «восьмерки» вращения вокруг продольной ее оси. Процесс смерзания двух гранул в ледяной воде сопровождается теплообменом — передачей тепла от воды льду. Наблюдаемые признаки смерзания — «обрастание» ледяных гранул оболочкой изо льда с образованием

быстрорастущей переемычки между гранулами при их соприкосновении в виде бигранулы. Граница лед — вода в бигрануле подвижна: во времени динамично меняются не только ее размеры, расстояние точек границы от центров гранул, но и форма, угол и радиус закругления щели между шарами, а также температура.

Цель настоящей статьи — прояснение кинетики процесса смерзания ледяных гранул на основе математического моделирования и экспериментальных исследований.

Математическая модель смерзания двух шаров льда (рис. 1) в однофазном варианте представляет собой следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{aligned} c\rho T_t &= k\Delta T, \quad x \in \Omega, \quad t > 0; \\ T|_{t=0} &= T_0, \quad x \in \Omega_0; \\ T|_{\partial\Omega} &= 0, \quad \lambda\rho_2 D_N = \left[k \frac{\partial T}{\partial N_1} \right], \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В задаче (1) температура T определяется из уравнения теплопроводности

$$c\rho T_t = k\Delta T, \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

где c — коэффициент теплоемкости;

ρ — плотность вещества;

k — коэффициент теплопроводности.

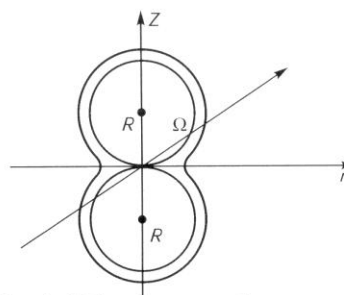


Рис. 1. Модель смерзания двух шаров льда

$T|_{\partial\Omega} = 0, x \in \partial\Omega, t > 0$ – граничные условия, $T|_{t=0} = T_0$, $x \in \Omega_0$ – начальное условие.

Фазовый переход сопровождается выделением (или поглощением) определенного количества тепла. Поэтому тепловой поток на границе фазового перехода разрывен и определяется величиной

$$\lambda \rho_2 D_N = \left[k \frac{\partial T}{\partial N_1} \right],$$

где λ – энтальпия фазового перехода;

D_N – скорость движения границы фазового перехода по нормали.

Исходя из симметричности данных, будем рассматривать задачу для правой части верхней гранулы. Рассматриваемая задача Стефана (1) может быть записана в виде одного общего уравнения теплопроводности во всей области Ω [4]:

$$[c(T) + \lambda \delta(T)] T_t = \text{div}[k(T) \nabla T], \quad (2)$$

где $\delta(T)$ – дельта-функция.

Функции коэффициентов теплоемкости и теплопроводности разрывны и имеют вид:

$$c(T) = \begin{cases} c_2, & T < 0; \\ c_1, & T \geq 0; \end{cases} \quad k(T) = \begin{cases} k_2, & T < 0; \\ k_1, & T \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Простейший подход к приближенному решению задачи Стефана в формулировке (2) – (3) состоит в том, что коэффициенты уравнения (2) сглаживаются, то есть совершается переход к обычной задаче теплопроводности.

В уравнении (2) теплоемкость $c(T)$ и слагаемое $\lambda \delta(T)$ входят одинаковым образом. Заменяем δ -функцию $\delta(T)$ некоторой функцией $\delta(T, \Delta)$, которая отлична от нуля только внутри интервала сглаживания $[-\Delta, \Delta]$, и введем эффективную сглаженную теплоемкость

$$\bar{c}(T) = c(T) + \delta(T, \Delta). \quad (4)$$

Существуют различные аппроксимационные формулы для $\delta(T, \Delta)$, которые строятся из условия сохранения баланса тепла на интервале $[-\Delta, \Delta]$. Мы будем использовать параболическую аппроксимацию

$$\delta(T, \Delta) = \begin{cases} \frac{3}{4\Delta} \left(1 - \frac{T^2}{\Delta^2} \right), & |T| \leq \Delta; \\ 0, & |T| > \Delta, \end{cases} \quad (5)$$

для которой выполняется условие $\int_{-\Delta}^{\Delta} \delta(T, \Delta) dT = 1$.

Можно провести также сглаживание коэффициента теплопроводности $k(T)$:

$$\bar{k}(T) = \begin{cases} k_2, & T < -\Delta; \\ k_2 + (k_1 - k_2) \frac{T + \Delta}{2\Delta}, & -\Delta \leq T \leq \Delta; \\ k_1, & T > \Delta, \end{cases} \quad (6)$$

где k_1, k_2 – коэффициенты теплопроводности для льда и воды соответственно.

Осуществим переход к безразмерным переменным, начиная с выбора характерных значений в модели. В качестве масштаба измерения пространственной переменной x можно взять длину радиуса L – линейный масштаб. Ис-

пользуя для безразмерных переменных те же обозначения, что и для размерных, но со штрихом, имеем

$$x = Lx',$$

где x' – безразмерная переменная.

В качестве масштаба температуры можно взять абсолютное значение начальной температуры:

$$T = T_c T',$$

где T' – безразмерная температура.

Аналогично пусть $t = t_0 t'$, где характерный масштаб времени t_0 пока не определен. В результате получим следующую замену:

$$x = Lx'; \quad t = t_0 t'; \quad T = T_c T'. \quad (7)$$

Подстановка в (2) приводит к уравнению в безразмерных переменных:

$$c_p \frac{T_c}{t_0} T'_t = \frac{k T_c}{L^2} \Delta' T' \quad \text{или} \quad \frac{c_p T_c L^2}{T_c t_0 k} T'_t = \Delta' T'. \quad (8)$$

$$\text{Если } t_0 = c_p L^2 / k, \text{ то } T'_t = \Delta' T', \quad t' > 0; \quad T'_t|_{t'=0} = -1. \quad (9)$$

L выберем так, чтобы начальный шар имел единичный радиус ($L = R$).

$$\lambda \rho_2 \frac{R}{t_0} D'_N = \left[k \frac{\partial T}{\partial N_1} \right] \frac{T_c}{R^2} = k_2 \frac{\partial T'}{\partial N'} \frac{T_c}{R^2}. \quad (10)$$

$$\frac{\lambda R^3 \rho_2}{t_0 k_2 T_c} D'_N = \frac{\partial T'}{\partial N'}; \quad a = \frac{R \lambda}{c_2 T_c}; \quad \frac{R \lambda}{c_2 T_c} D'_N = \frac{\partial T'}{\partial N'}. \quad (11)$$

В итоге получим:

$$T_t = \Delta T, \quad t > 0, \quad x \in \Omega_t;$$

$$T|_{t=0} = -1, \quad x \in \Omega_0 \quad (\text{шар с единичным радиусом});$$

$$T|_{\partial\Omega} = 0, \quad a D'_N = \frac{\partial T}{\partial N_1} \Big|_{\partial\Omega}, \quad (\text{условие Стефана}). \quad (12)$$

Запишем задачу в цилиндрической системе координат:

$$[c(T) + a \delta(T)] T_t = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r k(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right]; \quad (13)$$

$$T|_{t=0} = \begin{cases} -T_0, & r^2 + (z - R)^2 \leq R^2, \quad r \geq 0; \\ 0, & r^2 + (z - R)^2 > R^2, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq z \leq 3R. \end{cases} \quad (14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad z = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad z = 3R; \\ \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad r = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad r = 3R. \quad (15)$$

Будем решать задачу с осевой симметрией, то есть решение не будет зависеть от угла φ в цилиндрической системе координат r, φ, z . Границы воды, в которую помещен шар льда, $r = 3R$ и $z = 3R$.

Так как $L = R$, то в твердой фазе:

$$t_0 = c_2 \rho_2 L^2 / k_2 = c_2 \rho_2 R^2 / k; \quad k(T) = \begin{cases} 1, & T < 0; \\ k_1, & T > 0. \end{cases} \quad (16)$$

$$\bar{c}(T) = \begin{cases} 1, & T < 0; \\ \bar{c}_1 = \frac{c_1 \rho_1}{c_2 \rho_2}, & T > 0; \end{cases} \quad \bar{a} = a / (c_2 \rho_2) (1/T); \quad T_c = T_0, \quad (17)$$

где \bar{c} – коэффициент теплоемкости в новых переменных.

Следовательно, в новых переменных:

$$[c(T) + a \delta(T)] T_t = (1/r) (\partial/\partial r) [r k(T) (\partial T/\partial r)] + (\partial/\partial z) [k(T) (\partial T/\partial z)]. \quad (18)$$

$$c(T) = \begin{cases} 1, T < 0; \\ \bar{c}_i = \frac{c_i \rho_i}{c_2 \rho_2}, T \geq 0; \end{cases} \quad k(T) = \begin{cases} 1, T < 0; \\ \frac{k_1}{k_2}, T \geq 0. \end{cases} \quad (19)$$

$$T|_{t=0} = \begin{cases} -1, & r^2 + (z-R)^2 \leq 1, \quad r \geq 0; \\ 0, & r^2 + (z-R)^2 \leq 1, \quad r < 0, 0 \leq z \leq 3; \end{cases}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad z = 0 \text{ и } z = 3;$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad r = 0 \text{ и } R = 3. \quad (20)$$

Для численного решения задачи (18) – (20) использовались локально-одномерные неявные разностные схемы. При этом итоговые системы линейных алгебраических уравнений решались методом прогонки.

Экспериментальное исследование кинетики намораживания льда на бигранулу проводилось при температуре воздуха $-11 \dots -19^\circ\text{C}$. Ледяные шары (30 шт.) изготавливались из 60 полушарий путем их шлифовки и сморачивания парами по отработанной технологии [2]. Но вместо медной проволоки с крючком ввиду ее высокой теплопроводности авторы использовали капроновую нить диаметром 2 мм, длиной 260 мм, на которую с трением нанизывались с обоих концов 2 шара с заранее просверленными отверстиями. Получилось 15 «вишенок». Однородность структуры шаров достигалась заполнением водой неровностей или трещин с выравниванием (подгонкой) формы, массы и диаметров шаров под образец (шары погружали в воду на 5 – 10 – 15 с без взаимного соприкосновения). Это начальное погружение обозначено как «нулевое» ($n = 0$). Диаметры шаров бигранул на нитях в виде «вишенок» составляли после «нулевого» погружения $26,5 \pm 0,3$ мм, масса вишенок $19,5 \pm 0,5$ г (в том числе нитей – 1,5 г). Стягиванием упругих нитей скотчем (с биркой из бумаги под скотч) достигалось

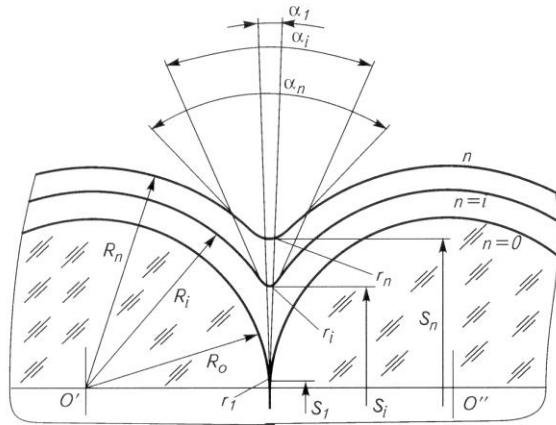


Рис. 2. Кинетика намораживания льда на бигранулу: R_n – усредненный радиус шаров бигранулы после n -го погружения, мм; S_n – усредненный диаметр перемычки («шейки»), мм; α_n – усредненный угол клиновидной щели, град (измеряется как угол между касательными к кривым в точках перегиба); r_n – усредненный радиус закругления клина щели, мм; n – число произведенных погружений на момент измерений, $n = 0, 1, 2, \dots, i, \dots, 12$

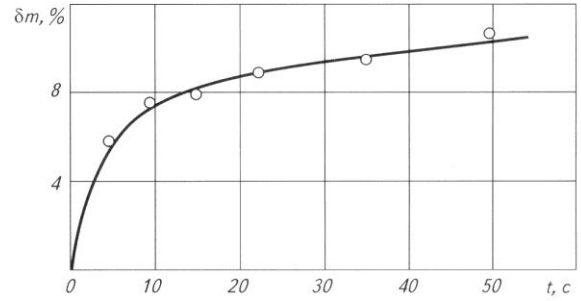


Рис. 3. Прирост удельной массы бигранул $\delta m = (\Delta m/m_0) \cdot 100\%$ от времени t однократного погружения в воду. Температура льда (воздуха) $-13 \dots -18^\circ\text{C}$

лось устойчивое соприкосновение шаров бигранул. Затем проводились погружения 8 вишенок в воду на короткие промежутки времени ($t = 5, 10, 25, \dots, 60$ с), остальных – сериями по 12 погружений длительностью 60 с каждое с интервалами между погружениями не менее часа.

До и после погружений измеряли массы «вишенок» на аптечных весах и геометрические параметры бигранул штангенциркулем, калибровками – заготовками уголков ($20, 30, \dots, 160^\circ$), проволоки и прутков разного диаметра (прикладыванием их в клиновую щель между шарами), а также при помощи фотосъемки (с линейкой).

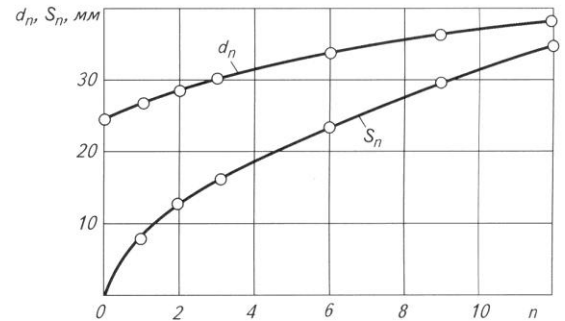


Рис. 4. Графики зависимости роста диаметров d_n шаров и перемычки S_n от числа погружений n (по 60 с)

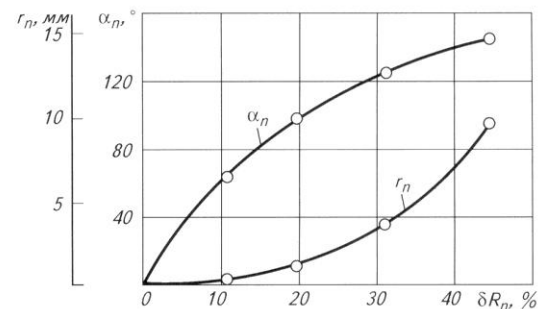


Рис. 5. Графики зависимостей величин радиуса r_n закругления в районе перемычки бигранулы и угла α_n клина щели от относительного прироста радиусов шаров $\delta R_n = (\Delta R_n/n) \cdot 100\%$

| n | $\delta m_n = [(m_n - m_0)/m_0] \cdot 100 \%$ | $\delta R_n = [(R_n - R_0)/R_0] \cdot 100 \%$ | $(S_n/d_n) \cdot 100 \%$ | r_n , мм | α_n , град |
|-----|---|---|--------------------------|------------|-------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1* | 11 | <3 | 20 | $\leq 0,5$ | 30 |
| 2* | 16 | 5 | 30 | $\leq 0,5$ | 50 |
| 3 | 30 | 11 | 50 | 0,5...1 | 65...70 |
| 6 | 70 | 18...20 | 73 | 1,5...2 | 90 |
| 9 | 120 | 32 | 80 | 3...5 | 110...130 |
| 12 | 180 | 44 | 91 | 10 | 140...160 |

* Трудности в измерениях r_n и α_n (присутствуют капиллярные эффекты), $r_1 \approx r_2 \approx r_3$.

На рис. 2 представлена схема для определения геометрических параметров бигранулы (после n -го погружения в воду).

По результатам эксперимента построены графики зависимостей удельной массы δm и основных геометрических параметров бигранул (d_n , l_n , S_n) от времени t (от 0 до 60 с) и числа n погружений по 60 с (рис. 3, 4), а также графики зависимостей величин радиусов r_n образующихся закруглений и углов α_n клиновой тороидальной щели в «шейках» бигранул от относительного прироста радиусов шаров ΔR_n (рис. 5).

Эмпирическая зависимость $\delta m = (\Delta m/m_0) \cdot 100 \%$ от времени t (см. рис. 3) может быть представлена соотношением $\delta m = 4,775t^{0,2} \operatorname{th}(0,345t), \operatorname{th}(x) = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x}), t \in [0;50]$;

$$\begin{aligned} d_n &= 25 + 27,29n/(n + 12,34), \\ S_n &= 8,286 n^{0,577}, \quad n \in [0;12]. \end{aligned} \quad (22)$$

Для зависимостей (рис. 5) угла α_n и радиусов r_n закругления клина щели от относительного прироста радиусов шаров $\delta R_n = (\Delta R_n/R_0) \cdot 100 \%$ наиболее близкой аналитической аппроксимацией могут служить соотношения:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= 27,15(\delta R_n)^{0,447} \operatorname{th}(0,106\delta R_n), \\ r_n &= 0,000115 (\delta R_n)^3 (1 + 6,04\delta R_n e^{-0,284\delta R_n}), \quad R_n \in [0;44]. \end{aligned}$$

Обобщенно-выборочные результаты эксперимента приведены в таблице.

Неравномерность толщины δR_n наморозки для различных n объясняется различием температур ($-11 \dots -19 \text{ }^\circ\text{C}$) и количества получаемой из воды теплоты для различных R_n при постоянном времени погружения (60 с), а также различием интервалов времени «сушки».

С ростом n α_n достигнет 180° , а r_n , неограниченно возрастая, перейдет в свой противоположный радиус (инверсия). Бигранула превратится в одиночную гранулу – эллипсоид вращения, а при дальнейшем росте n эллипсоид превратится в шар ($S_n \rightarrow l_n$ при $n \rightarrow \infty$).

Результаты эксперимента хорошо согласуются с предшествовавшими исследованиями [1,2] изменений масс и размеров одиночных шаров по времени.

Выводы

✓ Намораживание слоя льда на бигранулу происходит неравномерно по поверхности с образованием перемычки между шарами. Отмечены практически мгновенное появление и значительно опережающий рост диаметра перемычки S_n по сравнению с ростом длины l_n бигранулы и диаметров d_n шаров – почти на порядок за первую минуту (при $n = 1$).

✓ Визуальные наблюдения формирования перемычки бигранулы позволяют говорить о первоначально ($n = 1, 2, 3$) клинообразной, почти остроугольной форме щели между шарами вместо ожидаемого (до эксперимента) плавного (по радиусу r_n) перехода окружности в окружность. Радиус r_n закругления появляется лишь при $n > 3 \dots 6$, достигая при $n = 6$ величины $r_n = 1,5 \dots 2$ мм, а затем (при $n > 6$) быстро возрастает. В то же время угол α_n клиновой щели после существенного роста (от 0 до 70°) при первых трех погружениях теряет темп роста при $n > 3$, квази-асимптотически приближаясь к значению 180° при $n > 6$. При $\alpha_n = 180^\circ S_n \geq d_n$, бигранула превратится в одиночную – эллипсоид вращения, затем в шар ($S_n \rightarrow l_n$ при $n \rightarrow \infty$).

Список литературы

1. Ащеулова А.С., Храпов А.А., Рагулин В.В., Полтавцев В.И. Математическая модель намораживания гранул льда для ледовых переправ в виде задачи Стефана // Бурение и нефть. 2007. № 4.
2. Ащеулова А.С., Храпов А.А., Рагулин В.В., Полтавцев В.И. Задача Стефана для адиабатического намораживания воды холодом гранул // Вестник КрасГАУ. 2007. № 1.
3. Мейрманов А.М. Задача Стефана. - Новосибирск: Наука, 1986.
4. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. - М.: Едиториал УРСС, 2003.
5. Рогов И.А., Куцакова В.Е., Филиппов В.И., Фролов С.В. Консервирование пищевых продуктов холодом. - М.: Колосс.
6. Рубинштейн Л.И. Проблема Стефана. - Рига: Звайгзне, 1967.