

# Моделирование процесса генерации льда и инея на поверхности воздухоохладителя

Д-р техн. наук Е. В. СЕМЕНОВ

Российская экономическая академия им. Г. В. Плеханова

117997, г. Москва, Стремянный пер., 36

Д-р техн. наук Б. С. БАБАКИН,

канд. техн. наук М. И. ВОРОНИН, ЛАСАРО МОРЕХОН

Московский государственный университет прикладной биотехнологии

109316, г. Москва, ул. Талалихина, 33

*Quantitative analysis of ice and frost formation is being carried out on an unbounded plate and an unbounded cylinder that model an air cooler wall. The rate of ice and frost layer growth on the given surfaces is estimated depending on thermal physical parameters of the process in terms of a model of Stephan problem type.*

**Key words:** air cooler, modeling, (simulation), ice- and frost formation, cooled surface, heat and mass transfer, Stefan method, phase changes.

**Ключевые слова:** воздухоохладитель, моделирование, льдо- и инееобразование, охлаждаемая поверхность, тепломассообмен, метод Стефана, фазовые переход.

## Введение

При проектировании холодильных установок особенно тщательно рассчитывают теплообменные компоненты аппаратуры и их рабочие поверхности, поскольку формирующийся на хладообразующей поверхности аппарата слой льда и оседающий на нем иней приводят к резкому снижению интенсивности теплообмена.

Вопросам образования на охлаждаемой поверхности таких субстанций, как лед и иней, посвящено много работ, большинство из которых носит экспериментальный характер [1–11]. Так, в работе [1] микроскопическим анализом показано, что на влажной или сухой поверхности при свободной конвекции критическое время формирования инея достигается быстрее в условиях пониженной температуры. В работе [2] представлены результаты экспериментального исследования формирования инея на алюминиевой поверхности в условиях вынужденной конвекции при температуре холодной поверхности от минус 15 до 0 °С и воздуха 16,5 и 22 °С, относительной влажности 20–70 %, скорости воздушной среды 0–0,5 м/с. Установлено, что время существования переохлажденной капли воды и ее диаметр уменьшаются одновременно с понижением температуры холодной поверхности или температуры воздуха. С увеличением скорости движения воздушного потока срок жизни переохлажденной капли воды сначала уменьшается, а затем

увеличивается, в то время как диаметр замороженной капли непрерывно увеличивается. Причем скорость движения воздушного потока оказывает небольшое влияние на начальное формирование кристаллов инея.

Статья [3] посвящена численному анализу перемещения границы, разделяющей жидкую и твердую фазы в процессе таяния льда. В данной статье было рассчитано поле температуры и изменение локального и среднего значений числа Нуссельта по времени. В работе [4] на основе предложенной математической модели проводится численное моделирование проблемы теплообмена между жидкостью и твердым телом, а также задачи суммарного воздействия локальных теплообменных процессов на интегральные теплообменные характеристики смеси. В статье [5] разрабатывается математическая модель холодильной установки на базе аккумулятора холода с фазовым переходом, и на ее основе производится вычислительная процедура, с помощью которой устанавливается влияние цикличности работы холодильной машины на рост толщины льда в аккумуляторе холода.

В общей постановке, в силу того что при инееобразовании на хладообразующей поверхности взаимодействует несколько механизмов тепломассопереноса, данную проблему решают с привлечением законов сохранения массы, импульса и энергии в совокупности с другими феноменологическими соотношениями. Поскольку такой подход к решению рассматриваемого явления чрез-

вычайно сложен, то по этой причине для исследования инееобразования в аппаратах искусственного холода часто прибегают к упрощенным моделям и гипотезам по наблюдаемому сложному явлению. Так, в обоснование кинетики процесса формирования инея в качестве движущей силы массопереноса полагают градиент концентрации водяных паров вблизи холодной поверхности и диффузионный массоперенос под действием градиента температуры. Кроме того, считают, что конвективный теплоперенос также развивается под действием градиента температуры и градиента концентраций [6], [7]. Поскольку термодиффузионный и диффузионный эффекты в инженерных расчетах можно не учитывать, то описание данных процессов проводят, опираясь на феноменологические уравнения Фика и Фурье. В результате даже в таких упрощающих допущениях при схематизации исследуемого явления приходят к весьма сложным параметрическим зависимостям по расчету процесса формирования слоев льда и инея на хладообразующей поверхности.

Одним из наиболее эффективных способов количественного анализа особенностей процесса льдо- и инееобразования является метод Стефана, используемый для решения задачи о фазовом переходе (о промерзании грунта). Поскольку данная задача в силу своего нелинейного характера в общей постановке неразрешима, то для ее исследования прибегали к приближенным аналитическим и вычислительным методам (Л. И. Рубинштейн [8], Л. С. Лейбензон [12], А. А. Самарский и А. Н. Тихонов [13], Т. Гудмен [14] и др.).

В то же время с момента появления и развития теплообменных аппаратов, работающих в условиях низких температур и производящих искусственный холод, возникла потребность в решении усложненного варианта задачи Стефана.

### Постановка задачи для неограниченной пластины

Следуя предложенной в книге [15] концепции по проблеме затвердевания тел цилиндрической и сферической формы, предполагается, что воздушную среду постоянной температуры  $T_c$ , включающую в себя во взвешенном состоянии частицы переохлажденной жидкости (воды) и отнесенную к декартовой системе координат, помещают в бесконечную пластину толщиной  $2h$ , имитирующую канал с хладагентом. Внутри пластины поддерживается постоянная температура  $T_x < T_c$  (рис. 1).

В результате в области вне пластины  $|x| > h$  из капелек переохлажденной воды, осаждающихся из воздушной среды на поверхности пластины, формируется слой льда, стесненный поверхностями  $x = h$  и  $x = \xi(t)$ , над которым, в свою очередь, из частиц жидкости образуется слой инея, ограниченный поверхностями  $x = \xi(t)$  и  $x = \eta(t)$  (см. рис. 1).

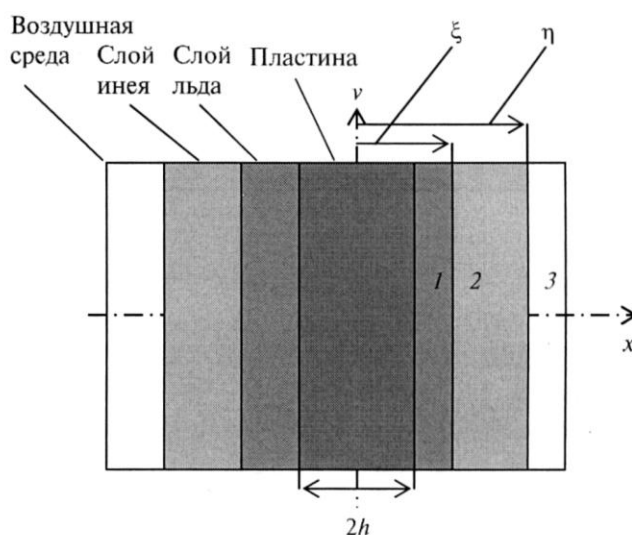


Рис. 1. Схема к расчету динамики нарастания на пластине слоев льда и инея:

1 — слой льда; 2 — слой инея; 3 — воздушная среда

В дальнейшем для анализа динамики формирования на охлаждаемой поверхности слоев из льда и инея на базе уравнений теплопроводности, записанных для областей 1 и 2, а также условий Стефана на разделяющих данные области поверхностях  $\xi = \xi(t)$  и  $\eta = \eta(t)$ , рассчитываются кинематические характеристики процесса — зависимости от времени толщины слоев льда и инея.

### Количественное моделирование процесса нарастания слоев льда и инея на поверхности пластины

Образование льда на холодной теплообменной поверхности индуцируется миграцией (вследствие разности парциальных давлений) к данной поверхности жидких частиц, находящихся в воздухе во взвешенном состоянии, и их оседанием на этой поверхности. При нормальном давлении, отрицательной и ниже точки росы температуре влажный воздух в фазовом состоянии находится в положении неустойчивого равновесия в том смысле, что температура взвешенных в нем частиц жидкости выше, чем среднеэффективная температура воздуха, так как объемная концентрация и, следовательно, удельное (отнесенное к общему объему влажного воздуха) тепло-содержание влаги невелики.

Тогда аналитически задача по расчету особенностей процесса нарастания на пластине слоев льда и инея (в предположении, что необходимое количество увлажненного воздуха непрерывно подводится к поверхности пластины) в зависимости от времени и в допущении симметричного относительно оси  $y$  характера процесса теплопереноса приближенно может быть сформулирована следующим образом.

Внутри областей 1 и 2 для льда и инея температура среды удовлетворяет дифференциальным уравнениям теплопроводности и граничным условиям I рода [15]:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \quad (t > 0, h < x < \xi), \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} \quad (t > 0, \xi < x < \eta), \quad (2)$$

$$T_1(h, t) = T_x, \quad (3)$$

$$T_1(\xi, t) = T_2(\xi, t) = T_3, \quad (4)$$

$$T_2(\eta, t) = T_c, \quad (5)$$

где  $t$  — время;

$T_1, T_2, T_x, T_3, T_c$  — соответственно температура льда, инея, хладагента, замерзания воды, среды;

$a_1, a_2$  — коэффициенты теплопроводности для областей 1 и 2 (см. рис. 1).

Если полагать, что на границе  $x = \xi(t)$  подвод теплоты на границах зон 1 и 2 определяется законом теплопередачи Фурье, то в предположении, что плотности  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  льда и инея считаются постоянными величинами, приходят к условию Стефана, справедливому на перемещающейся границе замерзания:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_1 T_1 - \lambda_2 T_2) \right]_{x=\xi(t)} = \rho_1 \gamma_1 \frac{d\xi}{dt},$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — соответственно коэффициент теплопроводности для областей 1 и 2;

$\rho_1$  — скрытая теплота фазового перехода воды в лед.

В свою очередь, в предположении, что температура  $T_c$  воздушной среды постоянна, и, следовательно,  $\partial T_c / \partial x = 0$ , на границе замерзания  $x = \eta(t)$  получают соотношение:

$$\left[ \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \right]_{x=\eta(t)} = \rho_2 \gamma_2 \frac{d\eta}{dt}, \quad (7)$$

где  $\rho_2$  — скрытая теплота десублимации на границе областей 2, 3.

В таком случае, в рамках принятой постановки задачи, приходят к замкнутой системе из четырех совместных дифференциальных уравнений (1), (2), (6), (7) относительно  $T_1, T_2, \xi, \eta$ , решение которой в данном виде невозможно.

Если перепад температуры по выделенным зонам невелик, то полагают режим теплопереноса в зонах 1 и 2 квазистационарным и вместо уравнений (1), (2) используют систему:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = 0 \quad (t > 0, h < x < \xi);$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = 0 \quad (t > 0, \xi < x < \eta),$$

решением которой, удовлетворяющим условиям (3)–(5), является

$$T_1(x, t) = \frac{(T_{1\xi} - T_x)x + T_x\xi - T_{1\xi}h}{\xi - h} \quad (t > 0, h < x < \xi), \quad (8)$$

$$T_2(x, t) = \frac{(T_{2\eta} - T_{1\xi})x + T_{1\xi}\eta - T_{2\eta}\xi}{\eta - \xi} \quad (t > 0, \xi < x < \eta), \quad (9)$$

где  $T_{1\xi} = T_1(\xi, t)$ ;

$T_{2\eta} = T_2(\eta, t)$ .

В соответствии с формулами (8), (9) выражения градиентов температуры имеют вид:

$$\frac{\partial T_1(x, t)}{\partial x} = \frac{T_{1\xi} - T_x}{\xi - h}, \quad \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial x} = \frac{T_{2\eta} - T_{1\xi}}{\eta - \xi}. \quad (10)$$

Исходя из того, что  $T_{1\xi} = T_{2\xi} = T_3$ , с помощью формул (6), (7) получают

$$\lambda_1 \frac{T_3 - T_x}{\xi - h} - \lambda_2 \frac{T_c - T_3}{\eta - \xi} = \rho_1 \gamma_1 \frac{d\xi}{dt}, \quad (11)$$

$$\lambda_2 \frac{T_c - T_3}{\eta - \xi} = \rho_2 \gamma_2 \frac{d\eta}{dt}. \quad (12)$$

Систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (11), (12) относительно  $\xi$  и  $\eta$  решают, согласуя с начальными условиями

$$\xi = h, \quad \eta = h \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (13)$$

Имея в виду, что система (11), (12) зависит от большого числа параметров, целесообразно перейти к безразмерным величинам по формулам:

$$\xi = h\xi', \quad \eta = h\eta', \quad t = \tau t', \quad (14)$$

где штрихи относятся к безразмерным величинам;

$\tau$  — характерное время.

Подставляя формулы (14) в (11)–(13) и опуская временно штрихи над безразмерными величинами, имеем:

$$\frac{d\xi}{dt} = \beta \kappa \left( \frac{\mu}{\xi - 1} - \frac{1}{\eta - \xi} \right), \quad (15)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\beta}{\eta - \xi}, \quad (16)$$

$$\xi(0) = 1, \quad \eta(0) = 1, \quad (17)$$

где

$$\beta = \frac{\lambda_2(T_c - T_3)\tau}{\rho_2 \gamma_2 h^2}, \quad \kappa = \frac{\rho_2 \gamma_2}{\rho_1 \gamma_1}, \quad \mu = \frac{\lambda_1(T_3 - T_x)}{\lambda_2(T_c - T_3)}, \quad (18)$$

здесь  $\beta, \kappa, \mu$  — критериальные параметры.

При этом параметр  $\beta$  является аналогом критерия Фурье — фактически безразмерным временем, выражающим отношение тепловой энергии, выделяющейся за счет теплопроводности в некотором объеме в течение времени  $\tau$ , к тепловой энергии, идущей на размораживание льда на границе «лед-инея» этого объема за то

же время;  $\kappa$  — аналог критерия Коссовича — отношение скрытой теплоты при фазовом переходе на границах «лед–иней» к соответствующей теплоте в области «иней–воздушная среда»;  $\mu$  — тепловая активность — отношение выделившейся теплоты за счет теплопроводности в области «лед» к соответствующей теплоте в области «иней» [15].

Общее решение системы уравнений (15), (16), определяющее стационарное движение среды, зависит от двух произвольных постоянных, определяемых на основе начальных данных (17).

С целью проанализировать проблему изменения в зависимости от времени толщины слоев льда и инея решали задачу (15)–(17) численным способом, для чего использовали процедуру Bulstoer в среде MATCHAD [16].

Поскольку задача (15)–(17) имеет особенности (появление нуля в знаменателе дроби) при  $\xi = 1$ ,  $\xi = \eta$ , при ее решении начальные условия (17) корректировали, относя их не к границе пластины  $\xi(0) = 1$ ,  $\eta(0) = 1$ , а к прилегающему к ней пограничному слою небольшой толщины:

$$\xi(0) = 1 + \delta, \quad \eta(0) = 1 + \varepsilon, \quad (19)$$

где  $\delta \ll 1$ ,  $\varepsilon \ll 1$ .

Анализ уравнений (15), (16) показывает, что сходимость численной процедуры зависит от величины управляющих параметров  $\beta$  и  $\kappa$ . А именно, сходимость (при фиксированном значении параметра  $\mu$ ) вблизи начала координат ухудшается при немалых значениях  $\beta$  и  $\kappa$ . Учитывая, что скрытая теплота  $\rho_2$  десублимации по величине превышает скрытую теплоту  $\rho_1$  фазового перехода льда в воду, при одинаковых по порядку величинах плотности льда и инея, в силу выражения (18), выполняется неравенство  $\beta/\beta\kappa = 1/\kappa < 1$ , что, в соответствии с уравнениями (15), (16), обуславливает большую по сравнению со скоростью нарастания слоя льда скорость нарастания слоя инея на пластине.

Численным моделированием выявлено, что удовлетворительное численное решение системы уравнений (15), (16), согласующееся с начальными условиями (17), получается, например, при выборе  $\delta = 10^{-3}$ ,  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$  и количестве шагов интегрирования  $n = 10^4$ .

В качестве исходных (по порядку величины) параметров задачи принимали: толщина пластины  $2h = 0,02$  м; коэффициенты теплопроводности для льда  $\lambda_1 = 2,3$ , инея  $\lambda_2 = 0,25$  Вт/(м·К); скрытая теплота десублимации  $\rho_2 = 2,8 \cdot 10^6$ ; скрытая теплота фазового перехода  $\rho_1 = 3,3 \cdot 10^5$  Дж/кг; плотность льда  $\gamma_1 = 900$  кг/м<sup>3</sup>, плотность инея  $\gamma_2 = 300$  кг/м<sup>3</sup> [10]. При этом значения критериальных параметров составили:  $\beta = 0,545$ ;  $\kappa = 0,039$ ;  $\mu = 9,2$ .

В целях выявления влияния температурного режима на процесс формирования слоев льда и инея рассматривали два варианта расчета: температура поверхности

пластины  $T_x = 267$  К, температура переохлажденной жидкости  $T_3 = 270$  К, температура воздушной среды  $T_c = 273$  К, перепад температуры по областям 1, 2, 3:  $\Delta T_1 = (T_3 - T_x) = (T_c - T_3) = 3$  К (1-й вариант расчета), а также  $T_x = 261$  К,  $T_3 = 267$  К,  $T_c = 273$  К, т. е.  $\Delta T_2 = (T_3 - T_x) = (T_c - T_3) = 6$  К (2-й вариант расчета).

Результаты количественного моделирования по выбранным параметрам, в безразмерной форме, динамики нарастания на пластине слоев льда и инея по каждому из вариантов (в миллиметрах) в зависимости от времени (ч) отражены на рис. 2.

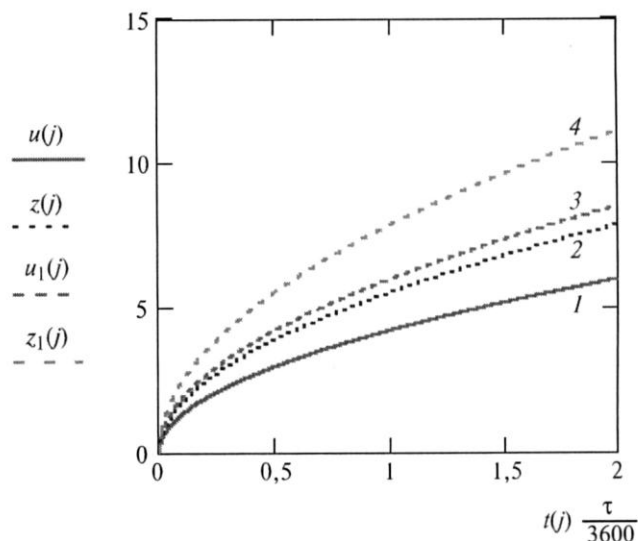


Рис. 2. Зависимости толщины слоя льда и толщины слоя инея (мм) на пластине от времени (с):  
(при  $\beta = 0,545$ ,  $\kappa = 0,039$ ,  $\mu = 9,2$ ,  $\Delta T = 3$  К:  
1 — лед; 2 — иней; при  $\Delta T = 6$  К: 3 — лед; 4 — иней)

Качественный анализ графиков на рис. 2 в области принятых значений режимных параметров показывает, что процесс нарастания слоев льда и инея по времени имеет экспоненциальный, сначала быстро возрастающий, а затем замедленный характер роста, при этом динамика намораживания на пластине этих слоев в зависимости от температуры — замедленная.

Предложенный алгоритм расчета позволяет проводить количественный анализ толщины слоев фаз по времени для критериальных величин  $\kappa$  и  $\mu$ .

Так, на основе расчетов выяснено, что изменение параметра  $\kappa$  в два раза — от  $\kappa = 0,02$  до  $\kappa = 0,04$  ( $\mu = 9$ ) — приводит, с одной стороны, к увеличению относительной толщины слоя льда от 0,412 до 0,574, т. е. к росту на 39,3 %, с другой стороны — к уменьшению толщины слоя инея от 0,815 до 0,753, т. е. к убыли толщины слоя инея на 7,6 % (рис. 3).

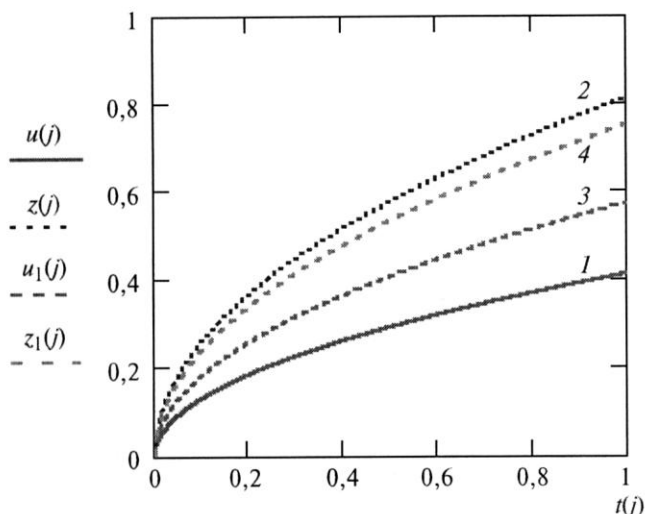


Рис. 3. Зависимости безразмерной толщины слоев льда и инея на пластине от параметра  $\kappa$  Коссовича (при  $\beta = 0,5$ ,  $\mu = 9$ ;  $\kappa = 0,02$ : 1 — лед; 2 — иней; при  $\kappa = 0,04$ : 3 — лед; 4 — иней)

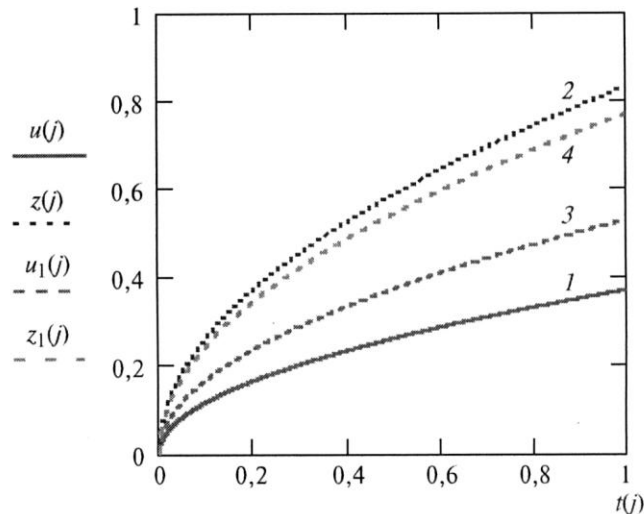


Рис. 4. Зависимости безразмерной толщины слоев льда и инея на пластине от параметра  $\mu$  тепловой активности (при  $\beta = 0,5$ ,  $\kappa = 0,03$ ,  $\mu = 5$ : 1 — лед; 2 — иней; при  $\mu = 10$ : 3 — лед; 4 — иней)

Выявленная расчетом динамика роста слоев субстанций соответствует физическому смыслу задачи, так как ясно, например, что при фиксированных, входящих в выражение критерия Коссовича  $\kappa = \rho_2 \gamma_2 / (\rho_1 \gamma_1)$  значениях параметров  $\rho_1$ ,  $\gamma_1$  льда и  $\rho_2$  инея, с увеличением плотности  $\gamma_2$  инея скорость роста его толщины уменьшается.

В то же время увеличение параметра  $\mu$  (тепловой активности) с 5 до 10 ( $\kappa = 0,03$ ) вызывает (рис. 4) изменение слоя льда с 0,370 до 0,529 (рост на 43 %), уменьшение слоя инея с 0,832 до 0,770 (убыль на 7,5 %). В самом деле, поскольку, по порядку величины,  $\mu = \lambda_1 / \lambda_2$ , ясно, что уменьшение коэффициента теплопроводности  $\lambda_2$  инея приводит к замедлению роста толщины его слоя. Откуда следует, что по параметру  $\mu$  отмечается такая же закономерность поведения слоев субстанций, как и по критерию Коссовича.

Таким образом, согласно расчету, относительная толщина слоя льда является возрастающей зависимостью по всем параметрам задачи:  $\beta$  (безразмерное время),  $\kappa$  и  $\mu$ . В свою очередь, если соответствующая толщина слоя инея, естественно, растет со временем, то с увеличением параметров  $\kappa$  и  $\mu$  — убывает.

Установленные особенности генерации слоев льда и инея на охлаждаемой поверхности, в зависимости от величины параметров  $\kappa$  и  $\mu$ , объясняются перераспределением тепловых потоков между слоями данных субстанций.

#### Список литературы

1. Qin Yan, Li Wei-zhong. Re kexue yu jishu // J. Therm. Sci. and Technol. 2005. 4. № 3.
2. Li Ruixia, Wang Weicheng. Qinghua daxue xuebao. Ziran kexue ban // J. Tsinghua Univ. Sci. and Technol. 2006. 46. № 5.
3. Hao Yingli, Iragorry Jose, Tao Yong X. Dongnan daxue xuebao. Ziran kexue ban // J. Southeast Univ. Natur. Sci. Ed. 2005. 35. № 1.

4. Корецкий В. Е. Исследование теплофизических свойств снежно-ледяных масс городских территорий // Экология и промышленность России. 2005. Сент.

5. Тимошенко В. М., Горбенко Г. А., Иваненко Н. И. Исследование процесса образования льда в аккумуляторе холода с фазовым переходом // Промышленная тепло-техника. 2006. 28. № 1.

6. Варивода В. А., Кириллов В. Х. Инееобразование на плоской поверхности // Холодильная техника и технология: Респ. межвед. научн.-техн. сб. 1986. Вып. 43.

7. Варивода В. А. Внешнее инееобразование на цилиндрической поверхности // Холодильная техника и технология: Респ. межвед. научн.-техн. сб. 1987. Вып. 44.

8. Рубинштейн Л. И. Проблема Стефана. — Рига: Знание, 1967.

9. Ржевская Б. Б., Степанов Л. А., Фомин Н. В. Исследование намораживания тонких слоев льда в аппаратах непрерывного действия // Холодильная техника. — 1973. № 5.

10. Напалков Г. Н. Тепломассоперенос в условиях образования инея. — М.: Машиностроение, 1983.

11. Иванова В. С. Нарастание инея в зависимости от условий эксплуатации воздухоохладителей // Холодильная техника. 1978. № 9.

12. Лейбензон Л. С. Руководство по нефтепромысловой механике. — М.: ГНТИ, 1931.

13. Тихонов А. И., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.

14. Гудмен Т. Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена / В сб.: Проблемы теплообмена. — М.: Атомиздат, 1967.

15. Лыков А. В. Теория теплопроводности. — М.: Высш. шк., 1967.

16. Кудрявцев Е. М. Matchad 2000. — М.: ДМК Пресс, 2001.