

Математическая модель перемещения квазиупругих объектов в рабочей камере

Н. А. МОСИНА, д-р техн. наук, проф. Г. В. АЛЕКСЕЕВ

Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9

The paper presents a model of interaction of tubers and of those with process chamber walls. Analytical relations received were taken as a basis to define geometry of working mechanisms.

Key words: mathematical simulation of displacement, working chamber, quasi-elastic object, processed raw material, technological machines, geometrical parameters, working elements.

Ключевые слова: математическая модель перемещения, рабочая камера, квазиупругий объект, перерабатываемое сырье, технологические машины, геометрические параметры, рабочие органы.

Характер перемещения перерабатываемого сырья в рабочей камере технологической машины весьма существенно влияет как на режимы процесса, так и на конструкцию рабочей камеры.

Известны модели перемещения, например, корнеклубнеплодов и овощей в рабочих камерах очистительных машин, которые являются основой выбора конструкции, в частности различных геометрических параметров таких камер, и кинематических параметров перемещения рабочих органов [1–3].

Для рабочих камер в виде цилиндрических обечайек, например машин типа МОК, такие модели, к сожалению, не учитывают взаимодействия отдельных элементов очищаемого сырья между собой.

Предполагая отдельные очищаемые элементы (например, клубни картофеля) упругими элементами, заменим их (в плоской постановке) жесткими дисками, соединенными между собой упругими пружинами. Предположим, что дополнительно крайний левый клубень закреплен неподвижно (опирается на основную массу очищаемого картофеля). Взаимодействие трех клубней, контактирующих между собой и со стенкой рабочей камеры, можно

тогда рассматривать в рамках следующей задачи: определить частоты свободных колебаний и найти формы главных колебаний системы с двумя степенями свободы, указанной на рис. 1 (l_{01} и l_{02} — длины недеформированных пружин 1 и 2).

Система состоит из двух однородных дисков, присоединенных к вертикальным поверхностям пружинами с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 и соединенных пружиной с коэффициентом жесткости c_3 . В состоянии покоя пружины с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 растянуты соответственно на величины f_{ct1} ; f_{ct2} . Пружина с коэффициентом жесткости c_3 сжата на величину $f_{ct1} + f_{ct2}$.

За обобщенные координаты примем q , r — горизонтальные смещения центров масс дисков 1 и 2 от положения статического равновесия. На рис. 1 показано положение системы при положительных обобщенных координатах.

Найдем кинетическую и потенциальную энергию системы. Кинетическая энергия системы состоит из кинетической энергии дисков:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{T_1 \dot{q}^2}{2} + \frac{J_1 \omega_1^2}{2} + \frac{T_2 \dot{r}^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2},$$

где \dot{q} , \dot{r} — обобщенные скорости;

J_1 , J_2 — моменты инерции дисков относительно осей, проходящих соответственно через их центры масс C_1 и C_2 . Моменты инерции дисков будут

$$J_i = \frac{m_i r_i^2}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Так как

$$\omega_1 = \frac{\dot{q}}{r_1}, \quad \omega_2 = \frac{\dot{r}}{r_1},$$

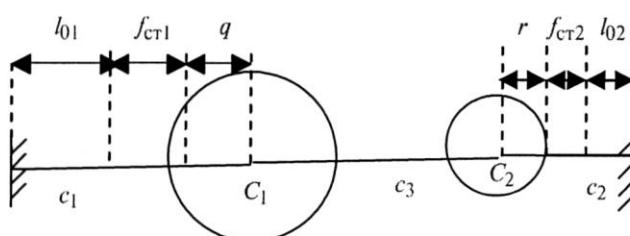


Рис. 1. Модель взаимодействия клубней

то

$$T = \frac{3}{4}(T_1\dot{q}^2 + T_2\dot{r}^2).$$

Потенциальная энергия системы равна работе сил при перемещении системы из отклоненного положения в нулевое (положение статического равновесия). Данную энергию системы вычислим как потенциальную энергию деформированных пружин. Деформации пружин следующие: $\lambda_1 = q + f_{ct1}$ — для пружины с коэффициентом жесткости c_1 ; $\lambda_2 = r + f_{ct2}$ — для пружины с коэффициентом жесткости c_2 ; $\lambda_3 = q + r + f_{ct1} + f_{ct2}$ — для пружины с коэффициентом жесткости c_3 . Следовательно,

$$\Pi = \frac{1}{2}c_1(q + f_{ct1})^2 - \frac{1}{2}c_1f_{ct1}^2 + \frac{1}{2}c_2(r + f_{ct2})^2 - \frac{1}{2}c_2f_{ct2}^2 + \frac{1}{2}c_3(q + r + f_{ct1} + f_{ct2})^2 - \frac{1}{2}c_3(f_{ct1} + f_{ct2})^2$$

или после упрощений:

$$\Pi = \frac{1}{2}c_1q^2 + \frac{1}{2}c_2r^2 + \frac{1}{2}c_3(q + r)^2 + c_1qf_{ct1} + c_2rf_{ct2} + c_3(q + r)(f_{ct1} + f_{ct2}).$$

Из условий покоя рассматриваемой системы, находящейся под действием сил, имеющих потенциал, имеем:

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_{q=0; r=0} = c_1f_{ct1} + c_3(f_{ct1} + f_{ct2}) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial r}\right)_{q=0; r=0} = c_2f_{ct2} + c_3(f_{ct1} + f_{ct2}) = 0.$$

Потенциальная энергия системы с учетом условий покоя имеет вид:

$$\Pi = \frac{1}{2}c_1q^2 + \frac{1}{2}c_2r^2 + \frac{1}{2}c_3(q + r)^2.$$

Таким образом,

$$T = \frac{3}{4}(T_1\dot{q}^2 + T_2\dot{r}^2),$$

$$\Pi = \frac{1}{2}c_1q^2 + \frac{1}{2}c_2r^2 + \frac{1}{2}C_3(q + r)^2$$

или

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}^2 + 2a_{12}\dot{q}\dot{r} + a_{22}\dot{r}^2);$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}q^2 + 2c_{12}qr + c_{22}r^2).$$

Здесь a_{ij} — коэффициенты инерции:

$$a_{11} = \frac{3}{2}m_1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = \frac{3}{2}m_2;$$

c_{ij} — коэффициенты жесткости:

$$c_{11} = c_1 + c_3, \quad c_{12} = c_3, \quad c_{22} = c_2 + c_3.$$

Для рассматриваемой консервативной системы уравнения Лагранжа имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\partial \Pi}{\partial r}.$$

Вычислив производные

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a_{11}\dot{q},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = a_{11}\ddot{q},$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = c_{11}q + c_{12}r,$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = a_{22}\dot{r},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) = a_{22}\ddot{r},$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = c_{21}q + c_{22}r$$

и подставив их в уравнения Лагранжа, получим

$$a_{11}\ddot{q} = -c_{11}q - c_{12}r, \quad a_{22}\ddot{r} = -c_{21}q - c_{22}r,$$

где $c_{21} = c_{12}$.

Таким образом, для данной системы дифференциальные уравнения свободных колебаний имеют вид:

$$a_{11}\ddot{q} + c_{11}q + c_{12}r = 0, \quad a_{22}\ddot{r} + c_{21}q + c_{22}r = 0.$$

Частное решение этих уравнений:

$$q = A \sin(kt + \beta), \quad r = B \sin(kt + \beta),$$

где A и B — амплитуды главных колебаний;

k — частоты свободных колебаний;

β — начальная фаза колебаний.

Уравнение частот, вытекающее из данной системы дифференциальных уравнений, имеет вид:

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - c_{12}^2 = 0.$$

Корни этого биквадратного уравнения, соответствующие квадратам частот, определим по формуле

$$k_{1,2}^2 = \left(a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} \mp \sqrt{(a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11})^2 - 4a_{11}a_{22}(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)} \right) / 2a_{11}a_{22}.$$

Пусть в рассматриваемой задаче: массы однородных дисков $m_1 = 0,18$ кг, $m_2 = 0,18$ кг; коэффициенты жесткости пружин: $c_1 = c_2 = c_3 = 135$ Н/м, тогда $a_{11} = (3/2)m_1 = 0,27$ кг; $c_{11} = c_1 + c_3 = 270$ Н/м; $c_{12} = c_3 = 135$ Н/м; $a_{22} = (3/2)m_2 = 0,36$ кг; $c_{22} = c_2 + c_3 = 270$ Н/м.

Следовательно, частоты свободных колебаний

$$k_1 = 500 \text{ с}^{-1}, \quad k_2 = 1500 \text{ с}^{-1}.$$

Коэффициенты распределения, соответствующие частотам k_1 и k_2 , в общем случае имеют вид:

$$\mu_1 = \frac{B_1}{A_1} = -\frac{c_{11} - a_{11}k_1^2}{c_{12} - a_{12}k_1^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k_1^2}{c_{22} - a_{22}k_1^2},$$

$$\mu_2 = \frac{B_2}{A_2} = -\frac{c_{11} - a_{11}k_2^2}{c_{12} - a_{12}k_2^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k_2^2}{c_{22} - a_{22}k_2^2}.$$

В данном случае $\mu_1 = -0,43$; $\mu_2 = 3,46$.

Уравнения, определяющие первое главное колебание, примут следующий вид:

$$q_1 = A_1 \sin(500t + \beta_1), \quad r_1 = -0,43A_1 \sin(500t + \beta_1).$$

Уравнения, определяющие второе главное колебание,

$$q_2 = A_2 \sin(1500t + \beta_2), \quad r_2 = 3,46A_2 \sin(1500t + \beta_2).$$

Общее решение дифференциальных уравнений представляет собой сумму частных решений:

$$q = q_1 + q_2 = A_1 \sin(500t + \beta_1) + A_2 \sin(500t + \beta_2),$$

$$r = r_1 + r_2 = 0,43A_1 \sin(500t + \beta_1) + 3,46A_2 \sin(1500t + \beta_2).$$

Значения A_i и β_i определяются по начальным условиям задачи.

Полученные решения позволяют усовершенствовать конструкцию рабочей камеры, размещая абразивные элементы в тех зонах цилиндрической обечайки, где клубень, контактирующий со стенкой камеры, наиболее интенсивно прижимается к рабочей поверхности. Эти зоны определяются с учетом скорости вращения клубня картофеля и собственной частоты колебаний рассмотренной системы из трех клубней, прилежащих к рабочей поверхности.

В общем случае на геометрию расположения абразивных полос должны влиять упругие характеристики пружин — модули упругости мякоти картофеля. Следовательно, учет сезонных изменений структурно-механических свойств картофеля требует применения различных рабочих органов при очистке свежесобранного картофеля и картофеля, прошедшего определенный срок хранения. Кроме того, на частоту колебаний и, соответственно, на требуемую ширину абразивных полос будет влиять масса очищаемых клубней.

Применив систему MathCAD, рассмотрим следующий интервал изменений массы клубней и коэффициента жесткости картофеля. Массу примем изменяющейся от $m_1=0,18$ кг до $m_1=0,27$ кг, а коэффициент жесткости — от $c_1=135$ Н/м до $c_1=160$ Н/м (причем при хранении жесткость уменьшается). Построим графики зависимости частот k_1 и k_2 от массы клубня и его жесткости (рис. 2).

Одной из возможностей улучшения качества очистки картофеля в камерах конусных картофелеочистительных машин является замена боковых вставок из сплошного абразива на вставки с прерывистым нанесением абразива. Это позволяет сократить энергозатраты, увеличить время работы абразивов без засаливания, улучшить качество очистки сырья, а также снизить трудоемкость изготовления рабочих органов.

Подобные покрытия рабочих органов состоят из пластмассовой подложки с нанесенными на нее методом гальванопластики полосами терочных элементов, которые имеют дополнительный слой из электропроводного материала (медной фольги).

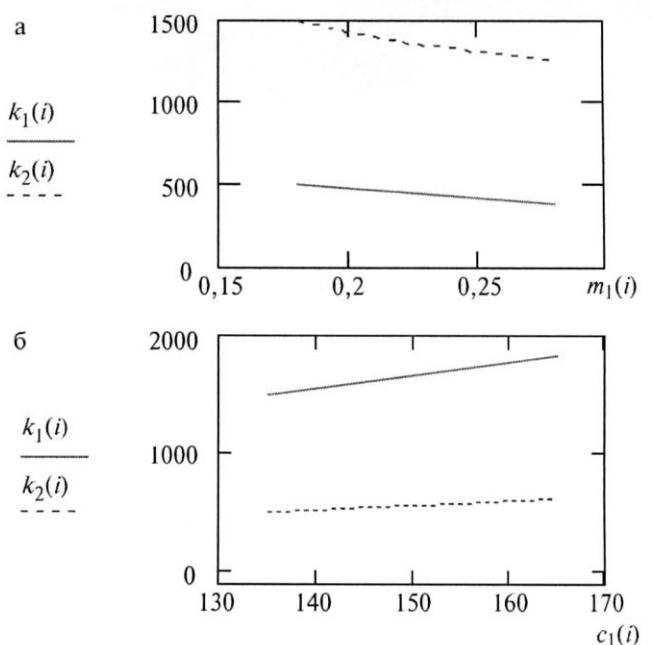


Рис. 2. Графики зависимости частот k_1 и k_2 от массы клубня m_1 (а) и его жесткости c_1 (б)

К геометрическим параметрам рабочих органов относятся ширина абразивных полос и расстояние между ними. Примем ширину и расстояние равными. Для их расчета нам потребуются следующие величины: $\omega = 9,6$ рад/с — угловая скорость вращения клубня относительно стенок рабочей камеры; $d = 0,48$ м — диаметр рабочей камеры, $l = \pi d$ (м) — длина окружности рабочей камеры. По следующей формуле найдем ширину нанесения абразивных полос $b(i)$:

$$b(i) = \omega \frac{l}{k_2(i)}.$$

С учетом возможных колебаний массы клубней и сезонных изменений упругих свойств картофеля эта величина будет колебаться в следующих пределах: от 8,14 мм (при массе 0,18 кг и жесткости 135 Н/м) до 9,69 мм (при массе 0,27 кг и жесткости 160 Н/м).

Список литературы

- Механическое оборудование предприятий общественного питания: Учеб. / В. Д. Елхина, А. А. Журин, Л. П. Проничкина, М. К. Богачев. — М.: Экономика, 1981.
- Жучков А. П., Бирюков Ю. И. Определение минимального числа оборотов рабочего органа картофелечистки периодического действия // Общественное питание: Респ. межвед. научно-техн. сб. 1970. Вып. 6.
- Чиков В. М. К вопросу о конструкции и режимах работы картофелечисток периодического действия // Оптимизация работы торгово-технологического оборудования: Сб. ст. — Л.: ЛИСТ, 1980.