

Моделирование поверхностей трения механических узлов криогенных систем

Д-р техн. наук А. В. ЦЫГАНКОВ, В. А. ВАСИЛЬЕВ

Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9

The paper examines an approach to simulate microgeometry of mechanical units in cryogenic systems. It can be used for calculation of tribotechnical and dissipative characteristics of processes on friction surfaces. The surfaces are simulated in the form of two-dimensional scalar random fields. Their statistical characteristics are defined by normalized roughness parameters and spectral decomposition of correlation profilogram functions.

Keywords: simulation, friction, mechanical assemblies, cryogenic systems, tribotechnical characteristics, roughness.

Ключевые слова: моделирование, трение, механические узлы, криогенные системы, триботехнические характеристики, шероховатость.

Высокие требования к чистоте среды в большинстве криогенных систем приводят к необходимости использовать в их механических узлах конструкции, работающие без жидкостной смазки. Триботехнические характеристики таких узлов в значительной мере определяются микрогеометрией контактирующих поверхностей. Как правило, моделирование микрогеометрических отклонений от номинальной (конструкторской) формы поверхностей основано на детерминированном представлении периодической функцией либо на моделях случайных одномерных процессов. Такие модели не позволяют учесть пространственный характер шероховатости трущихся поверхностей и во многих случаях неэффективны с алгоритмической точки зрения. Приведенная далее модель во многом лишена отмеченных недостатков.

Шероховатость поверхностей оценивают, согласно ГОСТ 25142–82, по результатам обработки профилограмм, которые можно рассматривать как сечения стохастической поверхности $\xi(x, z)$ нормальной плоскостью. Будем считать, что профилограмма — это функция $\xi(t)$. Очевидно, что ее ординаты распределены случайным образом. Конкретная реализация функции зависит от большого числа случайных факторов, имеющих различные функции распределения случайных параметров. Согласно центральной предельной теореме, процесс, являющийся результатом взаимодействия многих факторов, имеет многомерные распределения, близкие к нормальному (гауссовскому). Это положение подтверждается результатами обработки профилограмм, снятых с поверхностей различных деталей. В работах [1, 2] показано, что в большинстве случаев, не зависимо от технологии обработки и материала детали, профилограммы могут

рассматриваться как реализации гауссовского стационарного в широком смысле процесса с эргодическими свойствами, т. е. при достаточной протяженности процесса, не зависимо от выбора начальной точки, все статистические характеристики могут быть определены по результатам обработки одной реализации. Такие процессы статистически однозначно определяются математическим ожиданием m_ξ и автокорреляционной функцией $K_\xi(\tau)$, которая зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$.

В дальнейшем при моделировании шероховатости будем рассматривать случайные функции $\xi(t)$ с $m_\xi = 0$ и дисперсией $\sigma_\xi^2 = K_\xi(0) = 1$. Функции с другими параметрами могут быть получены как результат преобразования

$$\xi(t) = m_\xi + \sigma_\xi^2 \xi(t),$$

В соответствии с ГОСТом шероховатость нормируется параметрами

$$R_a = \frac{1}{L} \int_0^L |\xi(t)| dt; \quad R_z = \frac{1}{5} \left(\sum_1^5 h_{i\max} - \sum_1^5 h_{i\min} \right),$$

где L — базовая длина профилограммы;

$h_{i\max}$ и $h_{i\min}$ — пять высших и низших точек профилограммы, измеренных от средней линии в пределах базовой длины.

Рассмотрим связь между R_a и σ_ξ . Введем функцию

$$\xi_\xi^* = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi(t) > h; \\ 0. & \end{cases}$$

Найдем длину линии $l = \sum l_i$, которая является суммой длин отрезков пересечения функции $\xi(t)$ и $h = \text{const}$:

$$l(h) = \int_0^L \xi_\xi^*(t) dt;$$

с другой стороны,

$$l(h) = \int_0^L P\{|\xi(t)| > h\} dt.$$

Подынтегральное выражение представляет собой вероятность того, что ордината функции $\xi(t)$ больше h . С учетом того, что $\xi(t)$ — гауссовский процесс,

$$l(h) = 2L \left[1 - \Phi\left(\frac{h}{\sigma}\right) \right],$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$ — функция вероятности нормального распределения.

Выразим R_a через $l(h)$:

$$R_a = \frac{1}{L} \int_0^\infty l(h) dh = 2 \int_0^\infty \left[1 - \Phi\left(\frac{h}{\sigma}\right) \right] dh.$$

Так как

$$\int_x^\infty \left[1 - \Phi\left(\frac{h}{\sigma}\right) \right] dh = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) - x \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right],$$

$$\text{то } R_a = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Очевидно, что параметр R_a не является исчерпывающей характеристикой профилограммы, связь между ординатами одного случайного процесса в моменты времени t_1 и t_2 определяется корреляционной функцией

$$K(\tau) = \frac{1}{L} \int_0^{L+\tau} \xi(t)\xi(t+\tau) dt. \quad (1)$$

Так как $\xi(t)$ — гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, то $K(\tau)$ обладает следующими свойствами:

$$K(\tau) < K(0) = 1; \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^\infty |K(\tau)| d\tau < \infty.$$

Аппроксимируем (1) функцией $K_\xi(\tau)$, которая имеет указанные свойства:

$$K_\xi(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|). \quad (3)$$

Коэффициент затухания α определим через интервал корреляции R_τ . Под R_τ будем понимать интервал τ , при котором $K(\tau)$ принимает заданное пороговое значение. Обычно $K(R_\tau) = 0,05$, тогда

$$\alpha = \frac{\ln K(R_\tau)}{R_\tau} \approx \frac{3}{R_\tau}.$$

Корреляционная функция может быть представлена в виде суммы бесконечного числа гармоник с непрерывно меняющейся частотой u , иначе говоря, функция

может быть разложена в непрерывный спектр. Спектральная плотность $S_\xi(u)$ и корреляционная функция $K_\xi(\tau)$ связаны преобразованием Фурье:

$$S_\xi(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty K_\xi(\tau) e^{-iut} d\tau.$$

Для функции (3) спектральная плотность имеет вид

$$S_\xi(u) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + u^2)}. \quad (4)$$

Шероховатую двухмерную поверхность будем рассматривать как случайное поле, статистические характеристики которого определяются в результате обработки профилограмм. Профилограмма, как уже отмечалось, может рассматриваться как случайная функция, являющаяся сечением случайного поля нормальной плоскостью. Если статистические характеристики сечения не зависят от ориентации секущей плоскости, то такое поле является однородным изотропным и его характеристики (с учетом эргодических свойств) могут быть определены по единственной реализации. Шероховатость реальных поверхностей, как правило, анизотропная. Типичной является ситуация, при которой R_a — величина постоянная, а R_τ меняется в зависимости от ориентации секущей плоскости. Обычно параметры шероховатости контролируются в двух перпендикулярных направлениях, совпадающих с направлениями продольной и поперечной подачи режущего инструмента.

Случайное анизотропное поле, в частности поле, имеющее эллиптическую анизотропию, может моделироваться как изотропное поле. Так, двухмерное поле с корреляционной функцией

$$K(x, z) = \exp\left[-\sqrt{(x/R_{\tau x})^2 + (z/R_{\tau z})^2}\right],$$

где $R_{\tau x}$ и $R_{\tau z}$ — независимые интервалы корреляции по осям x и z , сводится к изотропному полю заменой $z' = zL_\tau$, здесь $L_\tau = R_{\tau x}/R_{\tau z}$ — степень анизотропии. Обратной заменой $z = z'/L_\tau$, которая соответствует сжатию (при $L_\tau > 1$) и растяжению (при $L_\tau < 1$) моделируемого поля вдоль оси x , осуществляется переход к анизотропному полу.

Таким образом, для моделирования шероховатой поверхности, которая рассматривается как неизотропное однородное гауссовское поле, необходимо задать параметр шероховатости R_a или R_z и интервалы корреляции $R_{\tau x}$ и $R_{\tau z}$. Отметим, что в качестве корреляционной может быть выбрана любая функция, обладающая свойствами (2).

Одной из моделей, позволяющих построить легко реализуемый алгоритм, эффективный с точки зрения затрат ресурсов ЭВМ, является параметрическая модель скалярного поля [3]

$$\zeta(X, \Omega) = m_\xi + \sigma_\xi y_\xi \left\{ \cos[V^T(X - X_0)] + \sin[V^T(X - X_0)] \right\},$$

где $X = (x, z)$ — вектор координат моделируемого поля;
 $\Omega = (y_\zeta, V)$ — случайный параметр поля;

y_ζ — случайная величина с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией;

$V = (v_1, v_2)$ — вектор пространственных частот поля, компоненты которого имеют плотности распределения $S_1(u_1)$ и $S_2(u_2)$ соответственно;

X_0 — начальный детерминированный аргумент поля.

Модель нормированного поля ($m_\xi = 0$, $\sigma_\xi = 1$) представим в виде

$$\zeta(X, \Omega) = \sqrt{2}y_\xi \sin \left[V^T (X + X_0) + \frac{\pi}{4} \right]. \quad (5)$$

Поле (5) адекватно моделируемому полю на уровне первых двух моментов и корреляционной функции. В работе [3] показано, что для моделирования поля с гауссовским одномерным распределением случайная величина y_ζ должна иметь плотность распределения Релея

$$f_y(x) = |x| e^{-x}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (6)$$

симметрично продолженную на отрицательную полуось.

Модули компонентов вектора V являются независимыми случайными величинами с функциями распределения (4).

Таким образом, модель (5) сводится к определению независимых случайных величин y_ζ , v_1 , v_2 , для которых известны функции распределения. Моделирование этих величин проводится методом обращения. Пусть ξ — случайная величина, имеющая плотность распределения $f(x)$. Соответствующая ей функция распределения имеет вид $F(x) = \int_0^x f(x)dx$. Моделирование ξ осуществляется преобразованием

$$\xi = F^{-1}(\gamma), \quad (7)$$

где $\gamma = \text{Rav}(0, 1)$ — величина, равномерно распределенная в интервале $[0, 1]$.

Выражение (7) означает решение уравнения $F(\xi) = \gamma$.

Для функции (4) моделирующий алгоритм имеет вид $V = \alpha \sqrt{1/\gamma^2 - 1}$.

Для функции (6) моделирование проводится по формуле $z = \kappa \sqrt{-\ln \gamma}$, где κ принимает равновероятно два значения ± 1 .

Случайное поле (5) является суммой N пространственных гармоник

$$\xi(X) = \sum_{k=1}^N A_k \sin \left[V_k^T (X + X_0) + \frac{\pi}{4} \right] \quad (8)$$

со случайными амплитудами $A_k = y_k \sqrt{\frac{2}{N}}$ и пространственными частотами v_k (y_k и v_k — независимые реализации случайных величин y и v). Изотропное направление пространственных гармоник задается на плоскости полярным углом φ , равномерно распределенным на интервале $[0, 2\pi]$.

Погрешность воспроизведения законов распределения ординат двухмерного поля определяется количеством гармоник N . С ростом N погрешность стремится к нулю, но возрастает время выполнения расчетов. Фактическое значение N при моделировании определяется по критерию согласия $n\omega^2$ (критерий Смирнова—Колмогорова) [4]. Показатель согласия вычисляется по формуле

$$n\omega^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[F(x_i) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2, \quad (9)$$

где $F(x_i)$ — интеграл вероятности нормального распределения для аргумента поля x_i ;

n — число аргументов поля.

Так как моделирование проводится на сетке, то удобно принять в качестве n число узлов сетки. Если показатель согласия (9) менее 0,4614, то распределение ординат поля является нормальным с вероятностью не менее 0,95. Если это условие не выполняется, то в модели (8) следует увеличить число пространственных гармоник.

Список литературы

1. Крагельский И. В., Михин Н. М. Узлы трения машин: Справ. — М.: Машиностроение, 1984.
2. Хусу А. П., Витенберг Ю. Р., Пальмов В. А. Шероховатость поверхностей. Теоретико-вероятностный подход. — М.: Наука, 1975.
3. Шалыгин А. С., Палагин Ю. П. Прикладные методы статистического моделирования. — Л.: Машиностроение, 1984.
4. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. — М.: Финансы и статистика, 1983.