УДК 637.52

О времени промораживания прямоугольного бруса и параллелепипеда

Д-р техн.наук ***С.В.ФРОЛОВ, В.Л.КИПНИС***
Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий

The well-known formulae for freezing time of rectangular beam and parallelepiped is considered, its lacks are observed. Some new formulae, which are free from marked lacks, are suggested.

Широко используемая в холодильной технологии пищевых продуктов для определения продолжительности замораживания классическая формула Р.Планка [1] была получена для тел простой формы – бесконечных пластины и цилиндра, а также шара. Для тел же более сложной формы невозможно получить точную формулу даже при условии выполнения всех многочисленных упрощающих допущений [1], введенных Р.Планком.

Из тел сложной формы наиболее интересными являются бесконечный прямоугольный брус и параллелепипед. В литературе встречаются 4 варианта приближенных формул для расчета времени замораживания тел этой формы [1], а также подробный сравнительный обзор в [2]. Пусть прямоугольный брус имеет ребра $2R_1$ и $2R_2$ (м), причем $R_2 \le R_1$. Тогда характерный размер бруса (расстояние от поверхности до наиболее удаленной от нее точки) $R = R_2$. Введем также безразмерный параметр $\beta = R_1/R_2 \ge 1$. Аналогично определим размеры параллелепипеда $2R_1$, $2R_2$ и $2R_3$; $R = R_3 \le R_2 \le R_1$; $\beta_1 = R_1/R_3 \ge \beta_2 = R_2/R_3 \ge 1$.

Тогда все варианты формул для определения времени замораживания этих объектов можно представить в следующем виде:

$$\tau = \frac{q\rho R}{T_{кр} - T_{хл}}\left(Q\frac{R}{2\lambda} + P\frac{1}{\alpha}\right), \qquad (1)$$

где τ – время замораживания, с;

ρ – плотность тела, кг/м^3;

q – удельная теплота фазового перехода, Дж/кг;

λ – коэффициент теплопроводности замороженной части тела, Вт/(м·°С);

α – коэффициент теплоотдачи с поверхности тела, Вт/(м^2·°С);

$T_{кр}$ – криоскопическая температура, °С;

$T_{хл}$ – температура хладагента, °С;

Q и P – безразмерные коэффициенты, которые в различных вариантах расчета определяются по-разному.

1-й вариант. Используя коэффициент формы $Q = P = \Phi = V/(SR)$, где Φ – безразмерный коэффициент формы; V – объем тела, м^3; S – площадь поверхности тела, м^2, для бруса и параллелепипеда получим

$$\Phi_{бр} = \frac{\beta}{\beta+1};$$

$$\Phi_{п} = \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1\beta_2 + \beta_1 + \beta_2}. \qquad (2)$$

2-й вариант. По формулам Р.Планка [4, 5] при $P = \Phi$ находим:

$$Q_{бр} = \frac{\beta}{2} - \frac{(\beta-1)^2}{4}\ln\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right);$$

$$Q_{п} = \frac{2\beta_1 + 2\beta_2 + 1}{9} +$$

$$+\sum_{\pm} \pm(n_\pm - 1)(\beta_1 - n_\pm)(\beta_2 - n_\pm)\ln\left(\frac{n_\pm}{n_\pm - 1}\right);$$

$$n_\pm = (\beta_1 + \beta_2 + 1 \pm k)/3;$$

$$k = \sqrt{(\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 - 1) + (\beta_2 - 1)^2}.$$

3-й вариант. Используя формулы К.Танаки и И.Нишимото [6], а также [1, 2], получим при $P = \Phi$

$$Q_{бр} = \frac{2\beta^2}{(\beta+1)^2};$$

$$Q_{п} = \frac{3\beta_1^{\,2}\beta_2^{\,2}}{(\beta_1\beta_2 + \beta_1 + \beta_2)^2}.$$

4-й вариант. По формулам Г.Лоренсена и С.Росвика [3] и [2] определим

$$P_{бр} = 1 - \frac{1}{2\beta};$$

$$Q_{бр}=\frac{2(3\beta-2)}{3(2\beta-1)};$$

$$P_{п}=1-\frac{1}{2\beta_1}-\frac{1}{2\beta_2}+\frac{1}{3\beta_1\beta_2};$$

$$Q_{п}=\frac{2(6\beta_1\beta_2-4(\beta_1+\beta_2)+3)}{3(2\beta_1-1)(2\beta_2-1)}.$$

Каждый из этих вариантов имеет недостатки. Наиболее плохой 3-й вариант, так как он единственный из всех не подчиняется требованию: формула для параллелепипеда при $\beta_1\to\infty$ должна переходить в формулу для бруса с $\beta=\beta_2$, а формула для бруса при $\beta\to\infty$ – в формулу для бесконечной пластины (для которой $P = Q = 1$). Действительно, если наибольшая сторона стремится к бесконечности, то параллелепипед переходит в бесконечный прямоугольный брус, а он, в свою очередь, – в бесконечную пластину. Время замораживания (варианты 1, 2 и 3) квадратного бруса ($\beta = 1$) и куба ($\beta_1=\beta_2=1$) равно времени замораживания вписанных в них кругового цилиндра ($P = Q = 1/2$) и шара ($P = Q = 1/3$) соответственно, хотя очевидно, что цилиндр и шар замерзнут несколько быстрее. Вариант 4 не имеет этого недостатка, однако получаемые по этому варианту численные значения несколько сомнительны. В самом деле, в пределе бесконечно большого коэффициента теплоотдачи время замораживания квадратного бруса в этом варианте в 4/3 раза больше, чем вписанного цилиндра, а куба – в 2 раза больше, чем вписанного шара. На наш взгляд, разница слишком велика, особенно для куба. Кроме того, в варианте 4 в отличие от первых трех коэффициент P не совпадает с коэффициентом формы Φ. Это также некорректно.

Действительно, рассмотрим предел бесконечно малого коэффициента теплоотдачи $\alpha\to 0$. При этом температура во всех точках замороженного слоя, в том числе и на поверхности тела, стремится к криоскопической. Приравняем общий теплопоток с поверхности тела теплоте кристаллизации воды в теле:

$$(T_{кр}-T_{хл})S\alpha\tau = V\rho q.$$

Отсюда время замораживания

$$\tau=\frac{V}{S}\frac{q\rho}{T_{кр}-T_{хл}}\frac{1}{\alpha}=\frac{q\rho R}{T_{кр}-T_{хл}}\Phi\frac{1}{\alpha}.$$

Поскольку в пределе $\alpha\to 0$ мы должны получить второе слагаемое из (1), то коэффициент P должен быть точно равен коэффициенту формы Φ. Необходимо отметить также чрезвычайную громоздкость формул варианта 2. Получаемые при этом численные результаты отличаются от результатов, вычисленных по простым формулам варианта 1, не более чем на 9 % для бруса и на 14 % для параллелепипеда при любых параметрах процесса.

Итак, для получения соотношений для определения времени замораживания прямоугольного бруса и параллелепипеда, которые не имели бы недостатков описанных способов, но сохраняли бы их достоинства, необходимо руководствоваться следующими принципами:

искомые соотношения должны иметь вид (1), где коэффициент P равен коэффициенту формы Φ;

коэффициент Q должен удовлетворять следующим предельным соотношениям: $Q_{бр}(\beta)\to 1$ при $\beta\to\infty$; $Q_{п}(\beta_1,\beta_2)\to Q_{бр}(\beta_2)$ при $\beta_1\to\infty$;

выражения для коэффициентов $Q_{бр}$ и $Q_{п}$ должны быть достаточно простыми и похожими на выражения для коэффициентов формы (2), но их численные значения должны быть несколько больше, чем у $\Phi_{бр}$ и $\Phi_{п}$.

Всем этим требованиям удовлетворяют следующие соотношения:

$$Q_{бр}=\frac{\beta}{\beta+c_1};\qquad Q_{п}=\frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1\beta_2+c_1(\beta_1+\beta_2)+c_2},\qquad (3)$$

где c_1 и c_2 – некоторые безразмерные константы.

Для определения этих констант рассмотрим отношения времени замораживания квадратного бруса ($\beta=1$) $\tau_{кв\,бр}$ и вписанного в него кругового цилиндра $\tau_{ц}$, а также времени замораживания куба ($\beta_1=\beta_2=1$)$\tau_{куб}$ и вписанного в него шара $\tau_{ш}$ при условии $\alpha\to\infty$. Поскольку для цилиндра $Q = P = \Phi = 1/2$, а для шара $Q = P = \Phi = 1/3$, то из (1) и (3) получим

$$A=\frac{\tau_{кв\,бр}}{\tau_{ц}}=\frac{2}{c_1+1};\qquad B=\frac{\tau_{куб}}{\tau_{ш}}=\frac{3}{2c_1+c_2+1};$$

$$c_1=\frac{2}{A}-1;\qquad c_2=\frac{3}{B}-\frac{4}{A}+1.\qquad (4)$$

Таким образом, задача свелась к определению двух констант A и B. В рассмотренных выше четырех вариантах в первых трех $A = B = 1$, а в 4-м варианте – $A = 4/3$, $B = 2$, что представляется не вполне достоверным. Для определения этих констант есть несколько путей:

воспользоваться методами компьютерного моделирования и решать задачи о замораживании квадратного бруса и куба в рамках планковских допущений численными методами;

решать задачи приближенными аналитическими методами;

воспользоваться аналогией с охлаждением.

Наиболее простым путем является третий, так как в отличие от замораживания задачи об охлаждении квадратного бруса и куба можно легко решать посредством разделения переменных. Рассматривая случай длительного охлаждения до температуры, близкой к температуре хладоносителя, мы можем воспользоваться теорией регулярного теплового режима [1] и получим:

$$A = \frac{2\mu_1^2}{\pi^2} = 1{,}17...; \quad B = \frac{4}{3} = 1{,}33... , \tag{5}$$

где μ_1 – первый ноль функции Бесселя J_0.

Подставляя (5) в (4), получим значения $c_1 = 0{,}7$; $c_2 = -0{,}15$, подставляя которые в (3), будем иметь

$$Q_{бр} = \frac{\beta}{\beta + 0{,}7}; \quad Q_{п} = \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1\beta_2 + 0{,}7(\beta_1 + \beta_2) - 0{,}15}. \tag{6}$$

Итак, получены искомые, достаточно простые и корректные формулы (6) и (1) для определения продолжительности замораживания прямоугольного бруса и параллелепипеда. Отметим, что разработанные авторами приближенные аналитические методы расчета времени замораживания бруса и параллелепипеда, которые будут опубликованы позднее, дают результат, очень близкий к полученному в уравнении (6).

Список литературы

1. *Чижов Г.Б.* Теплофизические процессы в холодильной технологии пищевых продуктов. – М.: Пищевая промышленность, 1979.
2. *Чижов Г.Б., Грякалова О.Ф., Фрайберг А.М.* Сопоставление способов расчета продолжительности замораживания прямоугольных параллелепипедов // Холодильная обработка и хранение пищевых продуктов // Межвуз. сб. науч. тр., ЛТИ им. Ленсовета. – Л., 1976.
3. *Lorentzen G., Rosvik S.* The influence of packaging on freezing time and weight loss for cut meat // Annex 1960-3 au Bulletin de I.I.F.
4. *Plank R.* Uber die Gefrierzeit von eis- und wasserhaltigen Lebensmitteln // Zeitschrift fur die gessamte Kalte-Industrie, Bd 20, 1913, N 6.
5. *Plank R.* Beitrage zur Berechnung und Bewertung der Gefriergeschwindngkeit von Lebensmitteln // Beihefte zur Zeitschrift fur die gessamte Kalte-Industrie, Reihe 3, H. 10, Berlin, VDI-Verlag, 1941.
6. *Tanaka K., Nishimoto I.* Determination of the time required for freezing whale meat // Bulletin de I.I.F., (Number special), 1959, N 3.