УДК 637.52

Определение продолжительности СВЧ-дефростации пищевых продуктов

Д-р техн.наук **С.В.ФРОЛОВ**
Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий
С.Н.ГОРЯЙНОВ
Компания «Парнас-Холдинг»

The problem of microwave defreezing time calculation for foodstuffs is considered. The approximate formula for the process duration is suggested

Трудность определения времени размораживания пищевых продуктов при использовании СВЧ-нагрева заключается в том, что наряду с обычным теплопритоком к поверхности тела от окружающей среды имеются объемные источники тепла в оттаявшей части, которые зависят как от времени (из-за изменения размеров оттаявшей части в ходе процесса), так и от координаты (за счет затухания СВЧ-энергии [2]). Рассмотрим вначале случай оттаивания объектов малых размеров, когда затуханием СВЧ-энергии можно пренебречь. Мы полагаем, что вся энергия, генерируемая источником, выделяется в оттаявшей части тела, поскольку лед поглощает очень мало СВЧ-энергии. Запишем квазистационарное квазиодномерное уравнение теплопроводности для оттаявшей части тела:

$$\lambda\left\{\frac{d^2t}{dx^2}+\frac{k}{x}\frac{dt}{dx}\right\}+Q=0, \qquad (1)$$

где $t(x,\tau)$ – распределение температуры в оттаявшей части тела, °С;

x – координата поперек тела, м; $x = 0$ соответствует центру тела, $x = R$ – поверхности тела;

R – характерный размер тела, т.е. максимальное расстояние, которое должен пройти фронт таяния влаги в процессе дефростации, м;

λ – коэффициент теплопроводности оттаявшей части тела, Вт/(м^2·°С);

Q – выделение СВЧ-энергии в единице объема оттаявшей части тела за единицу времени, Вт/м^3;

k – некоторый безразмерный параметр, который определяется как

$$k = 1/\Phi - 1;\ \Phi = V/(SR), \qquad (2)$$

где Φ – безразмерный коэффициент формы тела;

V – объем тела, м^3;

S – площадь поверхности тела, м^2.

Для тел простой формы: $k = 0$ для бесконечной пластины, $k = 1$ для бесконечного цилиндра и $k = 2$ для шара.

Уравнение (1) имеет точное решение:

$$t(x,\tau)=C_1(\tau)x^{1-k}+C_2(\tau)-\frac{Qx^2}{2\lambda(k+1)}, \qquad (3)$$

где τ – текущее время, с, в момент начала дефростации $\tau = 0$;

$C_1(\tau)$ и $C_2(\tau)$ – константы интегрирования.

Если $k = 1$, то в выражении (3) необходимо заменить x^{1-k} на $\ln(x/R)$. В дальнейшем мы не будем отдельно рассматривать случай $k = 1$, чтобы не загромождать изложение. Все необходимые соотношения для этого случая могут быть получены предельным переходом при $k \to 1$ из общих формул.

Константы $C_1(\tau)$ и $C_2(\tau)$ могут быть получены из граничных условий для уравнения (1):

$$\lambda\left.\frac{dt}{dx}\right|_{x=R}=\alpha\{t|_{x=R}-t_a\};\ t|_{x=R-\Delta}=t_{cr}, \qquad (4)$$

где t_a – температура окружающей среды, °С;

α – коэффициент теплоотдачи с поверхности тела, Вт/(м^2·°С);

$\Delta(\tau)$ – толщина оттаявшей части, которая является функцией времени, причем $\Delta(0) = 0$, м;

t_{cr} – криоскопическая температура, °С.

Первое из соотношений (4) – стандартное краевое условие 3-го рода, а второе – условие, при котором на фронте дефростации температура равна криоскопической.

Подставляя (3) в (4), получим

$$C_1(\tau)=\frac{2(k+1)\lambda\alpha(t_a-t_{cr})+Q(2\lambda R+\alpha[R^2-(R-\Delta)^2]}{2(k+1)\lambda\{(1-k)\lambda R^{1-k}+\alpha[R^{1-k}-(R-\Delta)^{1-k}]\}}. \qquad (5)$$

Выражение для определения $C_2(\tau)$ нам не понадобится, поэтому мы его не приводим.

Теперь запишем уравнение теплового баланса:

$$q\rho\frac{d\Delta}{d\tau}=\lambda\frac{dt}{dx}\bigg|_{x=R-\Delta}=\lambda C_1(\tau)(R-\Delta)^{-k}-\frac{Q(R-\Delta)}{k+1}=$$
$$=\frac{2(k+1)\lambda\alpha(t_a-t_{cr})+Q(2\lambda R+\alpha[R^2-(R-\Delta)^2]}{2(k+1)\{(R-\Delta)^k[(1-k)\lambda+\alpha R]R^{-k}-\alpha(R-\Delta)\}}-$$
$$-\frac{2(R-\Delta)^{k+1}R^{-k}[(1-k)\lambda+\alpha R]}{2(k+1)\{(R-\Delta)^k[(1-k)\lambda+\alpha R]R^{-k}-\alpha(R-\Delta)\}},\qquad(6)$$

где q – теплота кристаллизации воды на единицу массы продукта, Дж/кг;

ρ – плотность продукта, кг/м^3.

Поглощаемая на фронте дефростации теплота фазового перехода согласно уравнению (6) должна подводиться через оттаявший слой. Проинтегрировав уравнение (6) по Δ в пределах от 0 до R, определим время дефростации. При этом необходимо учитывать, что тепловыделение Q в единице объема оттаявшего слоя величина непостоянная. Дело в том, что, хотя мощность СВЧ-установки постоянна, объем оттаявшего слоя в ходе процесса увеличивается. Объем оттаявшего слоя $V(\Delta)$ можно представить как

$$V(\Delta)=\frac{SR}{k+1}\left[1-\left(\frac{\Delta}{R}\right)^{k+1}\right].$$

Введем величину U (Вт/м^2), представляющую собой мощность СВЧ на единицу площади поверхности продукта. Тогда величину Q можно представить в виде

$$Q=\frac{U(k+1)R^k}{R^{k+1}-(R-\Delta)^{k+1}}.\qquad(7)$$

Подставляя (7) в (6) и проинтегрировав, получим формулу для определения времени дефростации:

$$\tau=\frac{q\rho R^2}{\lambda(t_a-t_{cr})}F(k,\mathrm{Bi},u);$$
$$F(k,\mathrm{Bi},u)=\int_0^1\frac{2(1-z^{k+1})[(1-k+\mathrm{Bi})z^k-\mathrm{Bi}z]dz}{(1-k)[2\mathrm{Bi}+u(\mathrm{Bi}+2)]+u\mathrm{Bi}(k+1)z^2-2[\mathrm{Bi}(1-k)+u(\mathrm{Bi}+1-k)]z^{k+1}}.\qquad(8)$$

Здесь мы ввели безразмерные комплексы:

$$u=\frac{UR}{\lambda(t_a-t_{cr})};\quad z=\frac{R-\Delta}{R};\quad \mathrm{Bi}=\frac{\alpha R}{\lambda}.$$

Интеграл в (8) в общем случае не выражается через элементарные функции, однако некоторые частные случаи можно выразить. Например, если $k=0$ (пластина), то имеем

$$F(0,\mathrm{Bi},u)=\frac{2}{u}\left\{1-\left(\frac{2}{u}+\frac{1}{\mathrm{Bi}}\right)\ln\left[1+\frac{u\mathrm{Bi}}{2(\mathrm{Bi}+u)}\right]\right\}.\qquad(9)$$

В случае $k=2$ (шар) формула получается очень громоздкой. При $\mathrm{Bi}=0$ имеем

$$F(k,0,u)=\frac{1}{u(k+1)};\quad \tau=\Phi\frac{q\rho R}{U}.\qquad(10)$$

Выражение (10) можно получить и без вычислений, поскольку в случае $\mathrm{Bi}=0$ поверхность продукта является теплоизолированной и вследствие этого теплота фазового перехода равна выделившейся в оттаявшем слое СВЧ-теплоте. Ну и, наконец, при $u=0$ получаем, как и следовало ожидать, классическую формулу Планка (поскольку в этом случае СВЧ-теплота равна 0):

$$F(k,\mathrm{Bi},u)=\frac{1}{(k+1)}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\mathrm{Bi}}\right);\ \tau=\frac{q\rho R}{t_a-t_{cr}}\left(\frac{R}{2\lambda}+\frac{1}{\alpha}\right).$$

Теперь рассмотрим случай, когда продукт имеет значительные размеры и затуханием СВЧ-энергии пренебречь нельзя. Здесь мы ограничимся рассмотрением только случая $k=0$, т.е. бесконечной пластины. Это связано с тем, что при $k\neq 0$ уравнение теплопроводности (1) не решается в квадратурах (не говоря уже о том, что экспоненциальный закон убывания СВЧ-теплоты, который мы используем далее, справедлив только для пластины, а в случае общего квазиодномерного тела он превращается в очень сложное выражение, содержащее комплексные функции Бесселя). Итак, для бесконечной пластины при $k=0$ уравнение (1) приобретает вид

$$\lambda\frac{d^2t}{dx^2}+Q\exp[-\xi(R-x)]=0.\qquad(11)$$

В выражении (11) мы использовали известный закон экспоненциального убывания СВЧ-теплоты в глубь тела [1], $\xi=1/h$ – коэффициент затухания, 1/м; h – характерная глубина проникновения СВЧ-поля в продукт (для широкого класса продуктов составляет 1,5 – 2 см). Уравнение (11) легко интегрируется:

$$t(x,\tau)=C_1(\tau)x+C_2(\tau)-\frac{Qx^2}{\lambda\xi^2}\exp[-\xi(R-x)].\qquad(12)$$

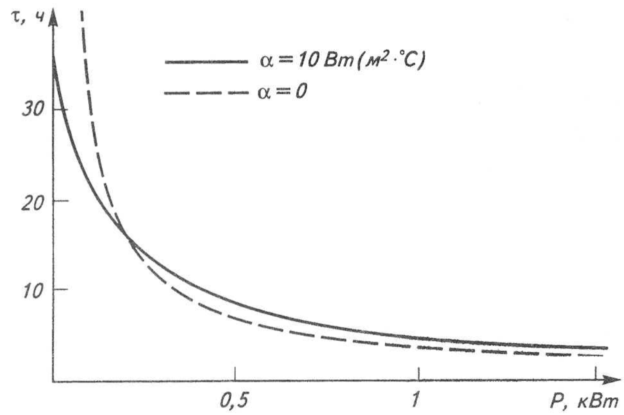
Далее подставляем (12) в граничные условия (4) и находим константу $C_1(\tau)$ ($C_2(\tau)$ нас не интересует):

$$C_1(\tau)=\frac{\alpha\lambda\xi^2(t_a-t_{cr})+\alpha Q[1-\exp(-\xi\Delta)]+\lambda\xi Q}{\lambda\xi^2(\lambda+\alpha\Delta)}.\qquad(13)$$

В уравнение теплового баланса подставляем (13):

$$q\rho\frac{d\Delta}{d\tau}=\lambda\frac{dt}{dx}\bigg|_{x=R-\Delta}=\lambda C_1(\tau)-\frac{Q}{\lambda\xi}\exp(-\xi\Delta)=$$
$$=\frac{\alpha\lambda\xi^2(t_a-t_{cr})+\alpha Q[1-(1+\xi\Delta)\exp(-\xi\Delta)]}{\xi^2(\lambda+\alpha\Delta)}+$$
$$+\frac{\lambda\xi Q[1-\exp(-\xi\Delta)]}{\xi^2(\lambda+\alpha\Delta)}.\qquad(14)$$

Теперь нам снова необходимо выяснить характер зависимости Q от Δ. Здесь появляется одна тонкость: СВЧ-энергия выделяется в оттаявшем слое неравномерно, поэтому выражение (7) использовать нельзя. Общую мощность СВЧ-энергии на единицу поверхности продукта U можно получить интегрированием



Зависимость продолжительности дефростации от мощности СВЧ-энергии, приходящейся на четвертину туши

экспоненциальной зависимости (11) по оттаявшему слою:

$$U = \int_{R-\Delta}^{R} Q\exp[-\xi(R-x)]dx = \frac{Q}{\xi}[1-\exp(-\xi\Delta)];$$
$$Q = \frac{U\xi}{1-\exp(-\xi\Delta)}. \tag{15}$$

Подставляя полученную зависимость (15) в (14) и интегрируя, определяем время оттаивания:

$$\tau = \frac{q\rho R^2}{\lambda(t_a - t_{cr})}F_0(\nu, \mathrm{Bi}, u);$$
$$F_0(\nu,\mathrm{Bi},u) = \int_0^1 \frac{\nu[1-\exp(-\nu\delta)](1+\mathrm{Bi}\delta)d\delta}{\mathrm{Bi}\cdot\nu[1-\exp(-\nu\delta)] + u\{\nu[1-\exp(-\nu\delta)] + \mathrm{Bi}[1-(1+\nu\delta)\exp(-\nu\delta)]\}}. \tag{16}$$

Здесь мы ввели безразмерные комплексы $\delta = \Delta/R$ и $\nu = \xi R$. Интеграл (16) также в общем случае не выражается через элементарные функции, но в некоторых предельных случаях его выразить можно. Во-первых, при $\nu = 0$ (т.е. в отсутствие затухания) из (16) получим выражение (9). Далее при $\mathrm{Bi} = 0$ получим выражение (10) независимо от значения ν. Наиболее интересен случай достаточно больших ν. Например, при дефростации стандартных говяжьих полутуш $R = 0{,}1$ м (половина толщины бедра) получаем $\nu = 5...7$. При этом в интеграле (16) экспонентами можно пренебречь, поскольку $\exp(-\nu) = 1...5\cdot10^{-3}$, а вот членами с $1/\nu$ пренебрегать нельзя. Тогда из (16) получаем:

$$F_0(\nu,\mathrm{Bi},u) \approx \frac{\nu(\mathrm{Bi}+2)}{2[\mathrm{Bi}\cdot\nu + u(\nu+\mathrm{Bi})]};\ \tau \approx \frac{q\rho R\left(\dfrac{R}{2\lambda}+\dfrac{1}{\alpha}\right)}{t_a - t_{cr} + U\left(\dfrac{h}{\lambda}+\dfrac{1}{\alpha}\right)}. \tag{17}$$

Выражение (17) отличается от формулы Планка лишь наличием дополнительного слагаемого в знаменателе. Поскольку форма говяжьих полутуш сильно отличается от пластины (коэффициент формы $\Phi = 0{,}56$ [4], что соответствует значению $k = 0{,}79$), то в первом приближении можно просто умножить (17) на коэффициент формы, как в классической формуле Планка.

В качестве примера рассмотрим дефростацию четвертин говяжьих туш (бедренная часть). Параметры продукта следующие (см. [1, 4]): масса 50 кг; коэффициент формы $\Phi = 0{,}56$; характерный размер (половина толщины бедренной части) $R = 0{,}1$ м; плотность $\rho = 1030$ кг/м³; теплопроводность оттаявшей части $\lambda = 0{,}465$ Вт/(м·°С); влажность $W = 0{,}74$ %; криоскопическая температура $t_{cr} = -2$ °С. Коэффициент теплоотдачи с поверхности продукта примем равным $\alpha = 10$ Вт/(м²·°С) (это отвечает обдуванию воздухом со скоростью 1 м/с и достаточно часто применяется при СВЧ-нагреве с целью предотвращения перегрева наружных слоев), глубину проникновения СВЧ-энергии в продукт $h = 0{,}015$ м; температуру окружающего воздуха $t_a = 20$ °С. График зависимости времени оттаивания от мощности СВЧ-энергии P, приходящейся на объект, показан на рисунке для рассмотренного выше случая, а также при $\alpha = 0$.

При небольших значениях мощности (до 0,5 кВт) продолжительность дефростации при $\alpha = 0$ больше (см. рисунок), чем при $\alpha = 10$ Вт/(м²·°С), поскольку в последнем случае имеется дополнительный приток тепла к поверхности. При более высоких мощностях, наоборот, продолжительность дефростации при $\alpha = 0$ меньше, поскольку в этом случае СВЧ-теплота, выделяющаяся в поверхностном слое, настолько высока, что при $\alpha = 10$ Вт/(м²·°С) теплопоток идет не к поверхности, а от поверхности, которая нагревается выше температуры среды.

Список литературы

1. *Бражников А.М.* Теория термической обработки мясопродуктов. – М., Агропромиздат, 1987.
2. *Рогов И.А., Некрутман С.В.* Сверхвысокочастотный нагрев пищевых продуктов. – М.: Агропромиздат, 1986.
3. *Фролов С.В., Куцакова В.Е., Кипнис В.Л.* Тепло- и массообмен в расчетах процессов холодильной технологии пищевых продуктов. – М.: Колос-пресс, 2001.
4. *Чижов Г.Б.* Теплофизические процессы в холодильной технологии пищевых продуктов. – М.: Пищевая промышленность, 1979.