УДК 621.56.001.57

Математическое моделирование процесса маслоотделения от хладагента в холодильных системах

Д-р техн. наук, проф. **Б.С. БАБАКИН**, *д-р техн. наук, проф.* **В.Ф. ШИРИКОВ, С.Б. БАБАКИН**
Московский государственный университет прикладной биотехнологии

A mathematical model for the process of oil separation and calculations on it are considered and this allows to determine the oil concentration in the pre-determined time period in the pre-determined point of the oil separator and thus to evaluate the efficiency of work of the filter.

При эксплуатации холодильных систем значительным резервом энергосбережения является уменьшение замасливания поверхности теплообменных элементов и трубопроводов. В частности, замасливание теплообменной поверхности конденсатора приводит к увеличению температуры конденсации (повышение температуры конденсации на 1°С вызывает увеличение удельного расхода электроэнергии примерно на 2 – 2,5 %), теплообменной поверхности прибора охлаждения – к понижению температуры кипения (снижение температуры кипения на 1°С увеличивает удельный расход электроэнергии примерно на 4 %). В трубопроводах холодильных систем, например, распределительных холодильников скапливается значительное количество масла, ухудшающего циркуляцию хладагента за счет повышенного падения давления в трубопроводах, приводящего к увеличению энергопотребления насосных схем.

Применяемые, например, механические маслоотделители винтовых маслозаполненных компрессоров позволяют значительно снизить концентрацию масляных включений в хладагенте, при этом она уменьшается по мере прохождения через фильтр маслоотделителя.

Ниже рассматриваются математическая модель процесса маслоотделения с учетом массопереноса и ее решение, что позволяет определять концентрацию масла в заданный момент времени и в заданной точке маслоотделителя и, следовательно, оценивать эффективность работы фильтров вспомогательного аппарата.

Модель маслоотделения от хладагента с учетом массопереноса имеет следующий вид:

$$\frac{dc}{d\tau}+u\frac{dc}{dx}=\nu\frac{d^2c}{dx^2}, \qquad (1)$$

где c – концентрация масляных включений в потоке хладагента;

ν – коэффициент диффузии;

u – скорость изменения концентрации.

Можно считать, что в начальный момент времени масляный фильтр маслоотделителя чист, т.е.

$$\text{при } \tau=0 \quad c(x,0)=0. \qquad (2)$$

Предположим, что поток масла и хладагента поступает к масляному фильтру с постоянной концентрацией, тогда на входе в фильтр маслоотделителя выполняется следующее условие:

$$\text{при } x=0 \quad c(0,\tau)=c^0. \qquad (3)$$

На выходе из фильтра маслоотделителя примем, что хладагент не содержит масляных включений:

$$\text{при } x=l \quad \frac{\partial c}{\partial x}=0, \qquad (4)$$

где l – габаритный размер фильтра маслоотделителя по ходу движения масляных включений.

Задачу (1) – (4) приведем к безразмерному виду. Для этого положим:

$$x=l\,\bar{x},\ \ \tau=\tau_0\,\bar{\tau},\ \ c=c^0\,\bar{c}, \qquad (5)$$

где $\bar{x}$, $\bar{\tau}$, $\bar{c}$ – приведенные величины.

Учитывая соотношения (5), путем несложных преобразований получаем:

$$\frac{\partial\bar{c}}{\partial\bar{\tau}}+\frac{u}{l/\tau_0}\frac{\partial\bar{c}}{\partial\bar{x}}=\frac{\nu_0\tau_0}{l^2}\frac{\partial^2\bar{c}}{\partial\bar{x}^2}, \qquad (6)$$

$$\text{при } \bar{x}=0 \quad \bar{c}(0,\bar{\tau})=1,$$

$$\text{при } \bar{x}=l \quad \frac{\partial\bar{c}}{\partial\bar{x}}=0, \qquad (7)$$

$$\text{при } \bar{\tau}=0 \quad \bar{c}(\bar{x},0)=1.$$

Величины l, τ_0 можно принять в качестве характерных. Тогда отношение l/τ_0 имеет смысл характерной скорости потока.

Обозначим $u/(l/\tau_0)=\varepsilon$. Очевидно, что $\varepsilon\le 1$, и можно считать ε «малым» параметром. Далее для удобства дальнейших описаний опустим черту над функциями и переменными в уравнениях (6) – (7). Обозначим также $\gamma=\nu\tau_0/l^2$.

В результате задача (6) – (7) примет вид:

$$\frac{\partial c}{\partial\tau}+\varepsilon\frac{\partial c}{\partial x}=\gamma\frac{\partial^2c}{\partial x^2}, \qquad (8)$$

при $x = 0$ $c(0,\tau) = 1$;

при $x = l$ $\dfrac{\partial c}{\partial x} = 0$; (9)

при $\tau = 0$ $c(x,0) = 1$.

Решение задачи (8) – (9) представим в виде регулярного асимптотического ряда:

$$c = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varepsilon^i . \tag{10}$$

Подставим разложение (10) в соотношения (8) и (9). Тогда для определения коэффициентов c_i требуется решить следующую задачу:

$$\frac{\partial c_0}{\partial \tau} = \gamma \frac{\partial^2 c_0}{\partial x^2}; \tag{11}$$

$$c_0(0,\tau) = 1; \quad \left.\frac{dc_0}{dx}\right|_{x=1} = 0; \quad c_0(x,0) = 0. \tag{12}$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial \tau} = \gamma \frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2} - \frac{\partial c_{i-1}}{\partial x}; \tag{13}$$

$$c_i(0,\tau) = 0, \quad \left.\frac{dc_i}{dx}\right|_{x=1} = 0; \quad c_i(x,0) = 0. \tag{14}$$

Для нахождения коэффициента c_0 получили однородное дифференциальное уравнение (11) с нулевыми начальным и граничным условиями (12). Остальные коэффициенты c_i определяются из решения задачи (13) – (14), которая представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение (13) также с нулевыми начальными и граничными условиями (14). Рассмотрим отдельно решение указанных задач.

Решение первой задачи найдем с помощью преобразования Лапласа, которое в данном случае имеет вид

$$\bar{c}_0(x,p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} c_0(x,\tau) d\tau, \tag{15}$$

здесь черта сверху означает образ функции $c_0(x,\tau)$.

Подставив (15) в соотношения (11) и (12) и проделав несложные преобразования, получим:

$$\bar{c}_0'' - \frac{p}{\gamma}\bar{c} = 0; \tag{16}$$

$$c_0(0,p) = \frac{1}{p}; \quad \left.\frac{d\bar{c}}{dx}\right|_{x=1} = 0, \tag{17}$$

где два штриха над $\bar{c}_0$ означают производную.

Решение уравнения (16) представим в виде

$$\bar{c}_0 = c_{01} e^{K_1 x} + c_{02} e^{K_2 x}, \tag{18}$$

где K_1 и K_2 – корни характеристического уравнения $K^2 - p/\gamma = 0$, (19)

которые равны $K_{1,2} = \pm\sqrt{p/\gamma}$. (19a)

Произвольные постоянные c_{01} и c_{02} определим из граничных условий (17):

$$\begin{cases} c_{01} + c_{02} = \dfrac{1}{p}; \\ K_1 c_{01} e^{K_1 l} + K_2 c_{02} e^{K_2 l} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Из системы уравнений (20) находим:

$$c_{01} = -\frac{1}{p} \frac{K_2 e^{K_2 l}}{K_1 e^{K_1 l} + K_2 e^{K_2 l}}; \tag{21}$$

$$c_{02} = \frac{1}{p} \frac{K_2 e^{K_2 l}}{K_1 e^{K_1 l} - K_2 e^{K_2 l}}. \tag{22}$$

С учетом корней (19а) характеристического уравнения выражения для c_{01} и c_{02} запишем в виде

$$c_{01} = -\frac{1}{2p} \frac{e^{-\sqrt{\frac{p}{\gamma}}}}{ch\left(\sqrt{\frac{p}{\gamma}}\right)}; \quad c_{02} = \frac{1}{2p} \frac{e^{\sqrt{\frac{p}{\gamma}}}}{ch\left(\sqrt{\frac{p}{\gamma}}\right)}. \tag{23}$$

Тогда решение (18) примет вид

$$\bar{c}_0 = \frac{1}{2p} \frac{e^{-\sqrt{\frac{p}{\gamma}}}}{ch\left(\sqrt{\frac{p}{\gamma}}\right)} e^{\sqrt{\frac{p}{\gamma}}x} + \frac{1}{2p} \frac{e^{\sqrt{\frac{p}{\gamma}}}}{ch\left(\sqrt{\frac{p}{\gamma}}\right)} e^{-\sqrt{\frac{p}{\gamma}}x}, \tag{24}$$

или после несложных преобразований получим

$$\bar{c}_0 = \frac{1}{2p} \frac{ch\left[\sqrt{\frac{p}{\gamma}}(x-1)\right]}{ch\left(\sqrt{\frac{p}{\gamma}}\right)}. \tag{25}$$

Используя таблицы обратных преобразований Лапласа [5], найдем выражение для оригинала. В размерном виде это выражение имеет вид

$$c_0(x,\tau) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+0{,}5)} \cos\left[(n+1)\frac{\pi}{l}(l-x)\right] \times$$

$$\times \exp\left[-(n+0{,}5)^2 \frac{\pi^2}{l^2} \nu\tau\right]. \tag{26}$$

Таким образом, соотношение (26) представляет собой нулевое приближение регулярного решения (10).

Далее найдем последующие приближения, т.е. для $i \geq 1$. Для этого необходимо решить задачу (13) – (14). Схема получения решения аналогична схеме получения нулевого приближения.

Для произвольного i-го приближения ($i \geq 1$) используем также представление (15). Тогда для образа $\bar{c}_i$ получим

$$\bar{c}_i'' - \frac{p}{\gamma}\bar{c}_i = \bar{c}_{i-1}'; \tag{27}$$

$$\bar{c}_i(0, p) = 0; \quad \bar{c}_i'(1, p) = 0. \tag{28}$$

Здесь как и выше, штрих означает производную по переменной x.

Решение задачи (27) – (28) представим в виде:

$$\bar{c}_i(x, p) = \bar{c}_{i1}(x)e^{K_1 x} + \bar{c}_{i2}(x)e^{K_2 x}, \tag{29}$$

где K_1 и K_2 – корни характеристического уравнения (19).

Используя метод вариации постоянных [1], запишем систему уравнений для определения коэффициентов $\bar{c}_{i1}$ и $\bar{c}_{i2}$:

$$\begin{cases} c_{i1}'e^{K_1 x} + c_{i2}'e^{K_2 x} = 0; \\ c_{i1}'K_1 e^{K_1 x} + c_{i2}'K_2 e^{K_2 x} = \bar{c}_{i-1}'. \end{cases} \tag{30}$$

Из решения системы (30) находим:

$$c_{i1}' = \frac{\bar{c}_{i-1}'e^{-K_1 x}}{K_1 - K_2}; \quad c_{i2}' = \frac{\bar{c}_{i-1}'e^{-K_2 x}}{K_1 - K_2}; \tag{31}$$

Интегрируя равенства (31), получим выражения для коэффициентов $\bar{c}_{i1}$ и $\bar{c}_{i2}$:

$$\begin{gathered} c_{i1} = \frac{1}{K_1 - K_2}\int_0^x \bar{c}_{i-1}'e^{-K_1\xi}d\xi + c_{i1}^0; \\ c_{i2} = \frac{1}{K_1 - K_2}\int_0^x \bar{c}_{i-1}'e^{-K_2\xi}d\xi + c_{i2}^0. \end{gathered} \tag{32}$$

Для определения постоянных интегрирования c_{i1}^0 и c_{i2}^0 используем краевые условия (28). В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} c_{i1}^0 + c_{i2}^0 = 0; \\ \dfrac{K_1 e^{K_1}}{K_1 - K_2}\displaystyle\int_0^1 \bar{c}_{i-1}'e^{-K_1\xi}d\xi + c_{i1}^0 K_1 e^{K_1} - \\ -\dfrac{K_2 e^{K_2}}{K_1 - K_2}\displaystyle\int_0^1 \bar{c}_{i-1}'e^{-K_2\xi}d\xi + c_{i2}^0 K_2 e^{K_2}. \end{cases} \tag{33}$$

Решая систему (33), найдем:

$$\begin{cases} c_{i1}^0(K_1 e^{K_1} - K_2 e^{K_2}) = -\dfrac{K_1 e^{K_1}}{K_1 - K_2}\displaystyle\int_0^1 \bar{c}_{i-1}'e^{-K_1\xi}d\xi + \\ +\dfrac{K_2 e^{K_2}}{K_1 - K_2}\displaystyle\int_0^1 \bar{c}_{i-1}'e^{-K_2\xi}d\xi; \\ c_{i2}^0 = -c_{i1}^0. \end{cases} \tag{34}$$

Учитывая, что

$$K_1 = K = \sqrt{p/\gamma} \text{ и } K_2 = -K = -\sqrt{p/\gamma}, \tag{35}$$

выражения для c_{i1}^0 и c_{i2}^0 примут вид:

$$\begin{gathered} c_{i1}^0 = \frac{\int_0^1 \bar{c}_{i-1}' \cdot chk(1-\xi)d\xi}{2Kchk}; \\ c_{i2}^0 = -\frac{\int_0^1 \bar{c}_{i-1}' \cdot chk(1-\xi)d\xi}{2Kchk}; \end{gathered} \tag{36}$$

Подставив c_{i1}^0 и c_{i2}^0 из (36) в (32), а затем и в соотношение (29), решение задачи (27) – (28) запишем в виде:

$$\begin{cases} \bar{c}_i(x, p) = \dfrac{e^{Kx}}{2K}\displaystyle\int_0^x \bar{c}_{i-1}'e^{-K_1\xi}d\xi - \dfrac{e^{-Kx}}{2K}\displaystyle\int_0^x \bar{c}_{i-1}'e^{-K_1\xi}d\xi - \\ -\dfrac{\int_0^1 \bar{c}_{i-1}' \cdot chk(1-\xi)d\xi}{2Kchk}e^{Kx} + \dfrac{\int_0^1 \bar{c}_{i-1}' \cdot chk(1-\xi)d\xi}{2Kchk}e^{-Kx} = \\ = \dfrac{1}{K}\displaystyle\int_0^x \bar{c}_{i-1}' \cdot shk(1-\xi) - \dfrac{shkx}{Kchk}\displaystyle\int_0^1 \bar{c}_{i-1}' \cdot chk(1-\xi)d\xi. \end{cases} \tag{37}$$

Соотношение (37) можно рассматривать как рекуррентный процесс получения $\bar{c}_i$ и затем оригинала. Однако во многих случаях для инженерных расчетов процессов фильтрации достаточно ограничиться первым приближением. С этой целью преобразуем правую часть уравнения (27) с учетом (25):

$$\bar{c}_0'(x, p) = -\frac{K}{p}\frac{shk(x-1)}{chk}. \tag{38}$$

Далее в соотношении (37) положим $i = 1$ и используем (38):

$$\begin{cases} \bar{c}_i(x, p) = -\dfrac{1}{p}\displaystyle\int_0^x \dfrac{shk(\xi-1)}{chk} shk(x-\xi)d\xi + \\ +\dfrac{shkx}{pchk}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{shk(\xi-1)}{chk} chk(1-\xi)d\xi, \end{cases} \tag{39}$$

или в другом виде:

$$\begin{cases} \bar{c}_i(x, p) = -\dfrac{1}{p}\displaystyle\int_0^x \dfrac{chk(1-x) - chk(1+x-2\xi)}{2chk}d\xi + \\ +\dfrac{shkx}{pchk}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{sh2k(1-\xi)}{2chk}d\xi. \end{cases} \tag{40}$$

Используя таблицы преобразования Лапласа, найдем оригиналы функций c_0 и c_1 по их образам, которые представлены выражениями (25) и (40). Оригиналы запишем в размерной форме:

$$c_0(x,\tau) = c^0 f_0(x,\tau) \text{ и } c_1(x,\tau) = c^0 f_1(x,\tau), \tag{41}$$

где:

$$f_0(x,\tau) = 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+0,5)}\cos\left[(n+0,5)\frac{\pi(x-l)}{l}\right]\times$$

$$\times\exp\left[-(n+0,5)^2\frac{\pi^2\nu}{l^2}\tau\right];$$

$$f_1(x,\tau) = \varphi_1(x,\tau) + \varphi_2(x,\tau) + \varphi_3(x,\tau);$$

$$\varphi_1(x,\tau) = \frac{x}{2}\left\{1 - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+0,5)}\cos\left[(n+0,5)\frac{\pi}{l}(l-x)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left[-(n+0,5)^2\frac{\pi^2\nu}{l^2}\tau\right]\right\};$$

$$\varphi_2(x,\tau) = \frac{1}{2}\int_0^x\left\{1 - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+0,5)}\cos\left[(n+0,5)\frac{\pi(l+x-2\xi)}{l}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left[-(n+0,5)^2\frac{\pi^2\nu}{l^2}\tau\right]\right\}d\xi;$$

$$\varphi_3(x,\tau) = \frac{1}{2l}\int_0^\tau\theta_1\frac{x/(2l)}{i\pi\nu\tau_0/l^2}d\tau_0\cdot\int_0^1\theta_1\left[\frac{(l-\xi)/l}{i\pi\nu(\tau-\tau_0)/l^2}\right]d\xi; \tag{42}$$

где τ_0 – временное смещение;

$$\theta_1\frac{\nu}{\omega} = (-i\omega)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp[-i\pi(\nu-0,5+n)^2\omega^{-1}].$$

Упростим ряд выражений, входящих в (42). Для этого в выражении в φ_2 проинтегрируем слагаемые, содержащие ξ:

$$\int_0^x\cos\left[(n+0,5)\frac{\pi(l+x-2\xi)}{l}\right]d\xi =$$

$$= -\frac{1}{(n+0,5)\frac{2\pi}{l}}\sin\left[(n+0,5)\frac{\pi(l+x-2\xi)}{l}\Big|_0^x\right] =$$

$$= \frac{l}{2(n+0,5)\pi}\left\{\sin\left[(n+0,5)\frac{\pi(l+x)}{l}\right] - \right.$$

$$\left. - \sin\left[(n+0,5)\frac{\pi}{l}(l-x)\right]\right\} = \tag{43}$$

$$= \frac{l}{2(n+0,5)\pi}\left\{2\cos(n+0,5)\pi\sin(n+0,5)\frac{\pi x}{l}\right\} =$$

$$= \frac{l}{2(n+0,5)\pi}\left\{2\cdot 0\cdot\cos(n+0,5)\frac{\pi x}{l}\right\} = 0.$$

С учетом (43) соотношение для φ_2 примет вид

$$\varphi_2(x,\tau) = \frac{x}{2}\exp\left[-(n+0,5)^2\frac{\pi^2}{l^2}\nu\tau\right]. \tag{44}$$

Аналогично упростим выражение для функции φ_3. С этой целью найдем значение интеграла, входящего в φ_3.

$$\int_0^1\theta_1\left[\frac{(l-\xi)/l}{i\pi\nu(\tau-\tau_0)/l^2}\right]d\xi = \frac{l}{\sqrt{\pi\nu(\tau-\tau_0)}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\int_0^l\exp\left[-\frac{(l+2ln-2\xi)^2}{\nu(\tau-\tau_0)}\right]d\xi. \tag{45}$$

Учитывая соотношение (45), получим:

$$\varphi_3(x,\tau) = \frac{l}{2\pi\nu}\int_0^\tau[\tau_0(\tau-\tau_0)]^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left[-\frac{l^2}{\nu\tau}\left(\frac{x}{2l}-0,5+n\right)^2\right]\times \tag{46}$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\int_0^l\exp\left[-\frac{(l+2ln-2\xi)^2}{\nu(\tau-\tau_0)}\right]d\xi d\tau_0.$$

Таким образом, исходная задача (1) – (4) решена. Теперь следует упростить полученные формулы. Асимптотическое разложение (10) ограничим двумя первыми членами. В результате будем иметь:

$$c(x,\tau) \approx c_0(x,\tau) + \varepsilon c_1(x,\tau) = c^0[f_0(x,\tau) + \varepsilon f_1(x,\tau)] =$$

$$= c^0[f_0(x,\tau) + \varepsilon\sum_{i=1}^{3}\varphi_{1i}]. \tag{47}$$

С точностью, достаточной для инженерных вычислений, в рядах функций f_0 и f_1 ограничимся двумя первыми членами. Тогда для функций $f_0(x,\tau)$, $\varphi_1(x,\tau)$, $\varphi_2(x,\tau)$, $\varphi_3(x,\tau)$ получим следующие выражения:

$$f_0(x,\tau) = 1 - \frac{4}{\pi}\left[\cos\frac{\pi(x-l)}{2l} - \frac{2}{3}\cos\frac{3\pi(x-l)}{2l}\cdot e^{-\frac{2\pi^2}{l^2}\nu\tau}\right]e^{\frac{\pi^2}{4l^2}\nu\tau};$$

$$\varphi_1(x,\tau) = (x/2)f_0(x,\tau);$$

$$\varphi_2(x,\tau) = \frac{x}{2}e^{\frac{\pi^2}{4l^2}\nu\tau}; \tag{48}$$

$$\varphi_3(x,\tau) = \frac{1}{2\pi\nu}\int_0^\tau[\tau_0(\tau-\tau_0)]^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times[e^{\frac{l^2}{\nu\tau_0}\left(\frac{x}{2l}-0,5\right)^2} - e^{\frac{l^2}{\nu\tau_0}\left(\frac{x}{2l}+0,5\right)^2} - e^{\frac{l^2}{\nu\tau_0}\left(\frac{x}{2l}-1,5\right)^2}]d\tau_0\times$$

$$\times\int_0^l[e^{\frac{(l-2\xi)^2}{(\tau-\tau_0)\nu}} - e^{\frac{(3l-2\xi)^2}{(\tau-\tau_0)\nu}} - e^{\frac{(l+2\xi)^2}{(\tau-\tau_0)\nu}}]d\xi.$$

Упростим выражение для φ_3. Для этого проведем некоторые преобразования, а также найдем и оценим интегралы, входящие в φ_3.

Сначала рассмотрим последний интеграл и преобразуем интеграл от первого слагаемого, т.е. интеграл $\int_0^l e^{\frac{(l-2\xi)^2}{(\tau-\tau_0)\nu}} d\xi$. Сделаем следующую замену переменных: $(l - 2\xi)/\sqrt{(\tau - \tau_0)\nu} = y$, тогда получим

$$\int_{-l_1}^{l_1} e^{-y^2} dy = \sqrt{(\tau-\tau_0)\nu} \cdot \int_0^{l_1} e^{-y^2} dy,$$

где $l_1 = l/\sqrt{(\tau - \tau_0)\nu}$.

Аналогичные преобразования выполним с интегралами от второго и третьего слагаемых. Тогда последний интеграл в соотношении (48) для φ_3 преобразуется следующим образом:

$$\int_0^l \left[e^{\frac{(l-2\xi)^2}{(\tau-\tau_0)\nu}} - e^{\frac{(3l-2\xi)^2}{(\tau-\tau_0)\nu}} - e^{\frac{(l+2\xi)^2}{(\tau-\tau_0)\nu}} \right] d\xi =$$

$$= \sqrt{(\tau-\tau_0)\nu} \left[\int_0^{l_1} e^{-y^2} dy - 0{,}5 \int_{l_1}^{3l_1} e^{-y^2} dy - 0{,}5 \int_{l_1}^{3l_1} e^{-y^2} dy \right] = \tag{49}$$

$$= \sqrt{(\tau-\tau_0)\nu} \left[\int_0^{l_1} e^{-y^2} dy - \int_{l_1}^{3l_1} e^{-y^2} dy \right].$$

Далее проведем следующие преобразования:

$$\int_0^{l_1} e^{-y^2} dy + \int_{l_1}^{\infty} e^{-y^2} dy - \int_{l_1}^{\infty} e^{-y^2} dy - \int_{l_1}^{3l_1} e^{-y^2} dy =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy - \int_{l_1}^{\infty} e^{-y^2} dy - \int_{l_1}^{3l_1} e^{-y^2} dy = \tag{50}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_{l_1}^{\infty} e^{-y^2} dy - \int_{l_1}^{3l_1} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + A,$$

где $A = -\int_{l_1}^{\infty} e^{-y^2} dy - \int_{l_1}^{3l_1} e^{-y^2} dy.$ (50a)

Подставим (49) и (50) в функцию $\varphi_3(x,\tau)$. Тогда будем иметь:

$$\varphi_3(x,\tau) = \frac{l}{2\pi\nu} \int_0^{\tau} [\tau_0(\tau-\tau_0)]^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[e^{\frac{l^2}{\nu\tau_0}\left(\frac{x}{2l}-0{,}5\right)^2} - e^{\frac{l^2}{\nu\tau_0}\left(\frac{x}{2l}+0{,}5\right)^2} - e^{\frac{l^2}{\nu\tau_0}\left(\frac{x}{2l}-1{,}5\right)^2} \right] \times \tag{51}$$

$$\times \left(\sqrt{(\tau-\tau_0)\nu} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} + A \right) d\tau_0.$$

Как следует из представления (50а) величина A оказывает несущественное влияние на функцию $\varphi_3(x,\tau)$. Тогда, пренебрегая A и введя следующие переменные:

$a_1 = l^2/\nu[x/(2l) - 0{,}5]^2$; $a_2 = l^2/\nu[x/(2l) + 0{,}5]^2$;
$a_3 = l^3/\nu[x/(2l) - 1{,}5]^2$, (51a)

получим:

$$\varphi_3(x,\tau) = \frac{l}{4\sqrt{\pi\nu}} \int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau_0}} \left[e^{-\frac{a_1}{\tau_0}} - e^{-\frac{a_2}{\tau_0}} - e^{-\frac{a_3}{\tau_0}} \right] d\tau_0. \tag{52}$$

Найдем последние интегралы, т.е. интегралы вида:

$$\int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau_0}} e^{-\frac{a_i}{\tau_0}} d\tau_0,\ i = 1, 2, 3. \tag{53}$$

Введем подстановку $z = 1/\sqrt{\tau_0}$. Тогда интеграл (53) примет вид

$$\int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau_0}} e^{-\frac{a_i}{\tau_0}} d\tau_0 = 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{\tau_0}}}^{\infty} \frac{e^{-a_i z^2}}{z^2} dz. \tag{54}$$

Последний интеграл равен

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\tau_0}}}^{\infty} \frac{e^{-a_i z^2}}{z^2} dz = -\frac{a_i\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - \Phi \frac{a_i}{\sqrt{t_0}} \right] + \sqrt{t_0} \cdot e^{-\frac{a_i^2}{t_0}}, \tag{55}$$

где специальная функция $\Phi(x)$ имеет вид

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\tau^2} d\tau, \tag{56}$$

или ее разложение в ряд [1, 4]:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}. \tag{57}$$

Ограничиваясь первым членом ряда (57), будем иметь

$\Phi(x) = (2/\sqrt{\pi})\, X.$ (58)

С учетом (55) и (58) выражение для функции $\varphi_3(x,\tau)$ примет вид

$$\varphi_3(x,\tau) = \frac{l}{4\sqrt{\pi\nu}} \left\{ \sqrt{\pi} \left[-a_1 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{a_1}{\sqrt{\tau}} \right) + a_2 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{a_2}{\sqrt{\tau}} \right) + a_3 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{a_3}{\sqrt{\tau}} \right) \right] + \sqrt{\tau} \left[e^{-\frac{a_1^2}{\tau}} - e^{-\frac{a_2^2}{\tau}} - e^{-\frac{a_3^2}{\tau}} \right] \right\}, \tag{59}$$

где a_1, a_2, a_3 определяются из соотношений (51а).

Итак, окончательно для приближенных вычислений решение исходной задачи представляется в виде:

$$c(x,\tau) \approx c^0[f_0(x,\tau) + \varepsilon \sum_{i=1}^{3} \varphi_{1i}], \tag{60}$$

где основные элементы решения $c\,(x,\tau)$ определяются из следующих соотношений:

$$f_0(x,\tau) = 1 - \frac{4}{\pi}\left[\cos\frac{\pi(x-l)}{2l} - \frac{2}{3}\cos\frac{\pi(x-l)}{2l}e^{-\frac{2\pi^2}{l^2}\nu\tau}\right]e^{-\frac{\pi^2}{4l^2}\nu\tau}; \tag{61}$$

$$\varphi_1(x,\tau) = (x/2)f_0(x,\tau), \tag{62}$$

$$\varphi_2(x,\tau) = \frac{x}{2}e^{-\frac{\pi^2}{4l^2}\nu\tau}; \tag{63}$$

$$\varphi_3(x,\tau) = \frac{l}{4\sqrt{\pi\nu}}\left\{\sqrt{\pi}\left[-a_1\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{a_1}{\sqrt{\tau}}\right)+\right.\right.$$
$$+a_2\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{a_2}{\sqrt{\tau}}\right)+a_3\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{a_3}{\sqrt{\tau}}\right)\Bigg]+ \tag{64}$$
$$\left.+\sqrt{\tau}\left[e^{-\frac{a_1^2}{\tau}} - e^{-\frac{a_2^2}{\tau}} - e^{-\frac{a_3^2}{\tau}}\right]\right\};$$

$$a_1 = l^2/\nu[x/(2l) - 0{,}5]^2;\ a_2 = l^2/\nu[x/(2l) + 0{,}5]^2;$$
$$a_3 = l^3/\nu[x/(2l) - 1{,}5]^2. \tag{65}$$

По соотношениям (60) и (61) – (65) можно определить концентрацию масляных включений в заданной точке и заданный момент времени в процессе отделения масла от хладагента, т.е. эффективность работы фильтров маслоотделителя с учетом их геометрических параметров.

Список литературы

1. *Абрамович М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. – М.: Наука, 1979.
2. *Бабакин Б.С.* Хладагенты, масла, сервис холодильных систем. – Рязань: Узорочье, 2003.
3. *Курылев Е.С., Оносовский В.В., Румянцев Ю.Д.* Холодильные установки. – Санкт-Петербург: Политехника, 1999.
4. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. – М.: Наука, 1990.
5. *Шириков В.Ф., Кулаков А.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Учебное пособие. – М.: МГУПБ, 2002.