УДК 664.8.037

Расчет времени охлаждения пищевых объектов методом квазиодномерного приближения

Д-р техн.наук **С.В.ФРОЛОВ, Г.И.МЕРЕМИНСКИЙ, К.Ю.ПОЛЯКОВ**
СПбГУН и ПТ

The problem of arbitrary form homogeneous body cooling in quasi-one-dimension approximation is observed. The simple formulas for cooling time are obtained by means of direct variation method.

В холодильной технологии пищевых продуктов часто бывает необходимо рассчитывать продолжительность охлаждения продукта до некоторой фиксированной температуры. При этом, как правило, задается конечная среднеобъемная температура (при охлаждении колбасных изделий после тепловой обработки, тушек птицы после забоя и пр.) или конечная температура поверхности (чаще всего при замораживании пищевых продуктов, так как первой стадией процесса является охлаждение поверхности продукта до криоскопической температуры). Как известно [1], точное решение теплофизической задачи об охлаждении тела возможно лишь в нескольких простейших случаях. Эти случаи отвечают, во-первых, постоянным теплофизическим характеристикам (однородное тело) и коэффициенту теплоотдачи (условия теплоотдачи одинаковы во всех точках поверхности) и, во-вторых, телам специальной формы. К ним относятся тела простой формы (бесконечные пластина и цилиндр, шар), а также некоторые их комбинации, такие, как бесконечный прямоугольный брус, параллелепипед, конечный цилиндр. Использование более тонкого математического аппарата позволяет получить точные решения еще для некоторых тел (ограниченных поверхностями второго порядка).

Реальные пищевые продукты представляют собой тела сложной формы, которые не могут быть с достаточной точностью аппроксимированы какой-либо из вышеперечисленных форм. Однако приемлемые соотношения для определения продолжительности охлаждения или нагревания тел сложной формы можно получить посредством использования так называемого квазиодномерного приближения. Основная идея этого метода состоит в том, что уравнения теплопроводности для всех трех тел простой формы носят сходный характер, а краевые и начальное условия просто тождественны:

$$c\frac{\partial t}{\partial \tau}=\lambda\left\{\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{k}{x}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right\}; \qquad -\lambda\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=R}=\alpha\left\{t|_{x=R}-t_{\text{хл}}\right\};$$

$$\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=0}=0; \qquad t|_{\tau=0}=t_{\text{нач}}, \tag{1}$$

где x – координата поперек тела, м;

$x = 0$ соответствует центру тела, а $x = R$ – его поверхности;

R – характерный размер тела, т.е. для пластины – половина толщины, для цилиндра и шара – радиус, м;

τ – текущее время, с;

$\tau = 0$ соответствует началу процесса;

$t(x,\tau)$ – температура внутри тела как функция координаты x и времени τ;

c – объемная теплоемкость продукта, Дж/м^3;

λ – коэффициент теплопроводности продукта, Вт/(м·°С);

α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м^2·°С);

$t_{\text{хл}}$ – температура окружающего продукт хладоносителя, °С;

$t_{\text{нач}}$ – начальная температура продукта, °С;

k – безразмерный коэффициент;

$k = 0$ для пластины, $k = 1$ для цилиндра и $k = 2$ для шара.

Отметим, что коэффициент k для тел простой формы можно определить как:

$$k=\frac{1}{\Phi}-1;\ \Phi=\frac{V}{SR}; \tag{2}$$

где Φ – безразмерный коэффициент формы тела;

V – его объем, м^3;

S – площадь поверхности, м^2.

Поскольку выражения (1) и (2) имеют смысл для тел любой формы, возникает естественная идея решить задачу (1) в общем виде для произвольного значения k и затем использовать полученное решение для определения температуры любого тела, подставляя в него значение коэффициента k, найденное из (2). При этом под характерным размером R понимается расстояние от поверхности тела до максимально удаленной от нее точки.

Прежде всего введем безразмерные переменные: координату $\xi = x/R$; время $\text{Fo}=\frac{\lambda\tau}{cR^2}$ (число Фурье); температуру $\theta=\frac{(t-t_{\text{хл}})}{(t_{\text{нач}}-t_{\text{хл}})}$; коэффициент теплоотдачи $\text{Bi}=\frac{\alpha R}{\lambda}$

(число Био). Перепишем уравнения (1) в безразмерном виде:

$$\frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} + \frac{k}{\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\xi};\ -\left.\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right|_{\xi=1} = \mathrm{Bi}\cdot\theta|_{\xi=1};$$

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = 0\ ;\quad \theta|_{\mathrm{Fo}=0} = 1. \tag{3}$$

Решая уравнение (3) классическим методом разделения переменных (метод Фурье) [1], получим:

$$\theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \Xi_i(\xi)\exp(-\mu_i^2 \mathrm{Fo})\,; \tag{4}$$

$$\frac{d^2\Xi_i}{d\xi^2} + \frac{k}{\xi}\cdot\frac{d\Xi_i}{d\xi} = -\mu_i^{\,2}\Xi_i\,; \tag{5}$$

$$\left.\frac{d\Xi_i}{d\xi}\right|_{\xi=0} = 0\,; \tag{6}$$

$$\left.\frac{d\Xi_i}{d\xi}\right|_{\xi=1} = -\mathrm{Bi}\,\Xi_i|_{\xi=1}\,; \tag{7}$$

$$C_i = \frac{\int_0^1 \xi^k \Xi_i(\xi)d\xi}{\int_0^1 \xi^k \Xi_i^{\,2}(\xi)d\xi}. \tag{8}$$

Уравнение (5) с граничными условиями (6) и (7) имеет решение в функциях Бесселя [3]. Однако это решение достаточно неудобно с точки зрения практических расчетов (для определения собственных чисел задачи μ_i необходимо решить трансцендентное уравнение с функциями Бесселя), поэтому мы, опираясь на прямой вариационный метод, получим приближенное решение этой задачи.

Если время охлаждения или нагревания достаточно велико, то в выражение (4) реальный вклад вносит только первый член ряда. Действительно, поскольку коэффициенты μ_i растут с увеличением i, то каждое последующее слагаемое ряда (4) убывает с ростом времени быстрее, чем предыдущее. Таким образом, для произвольного тела при достаточно большой продолжительности процесса температура может быть приближенно описана следующим выражением:

$$t \approx t_{\text{нач}} + (t_{\text{нач}} - t_{\text{хл}})A\exp\{-m\tau\}, \tag{9}$$

где величина m, называемая темпом охлаждения, не зависит от того, в какой точке тела измеряется температура t, а коэффициент A зависит от нее. Это называется приближением регулярного теплового режима.

Для расчета по формуле (9) необходимо определять темп охлаждения m и константы A для интересующих нас значений: среднеобъемной температуры $A_{\text{об}}$ и температуры поверхности $A_{\text{пов}}$. Однако эти два значения отнюдь не независимы. Действительно, рассмотрим случай однородного тела произвольной формы. Запишем уравнение теплового баланса:

$$dt_{\text{об}}cV = -\alpha S(t_{\text{пов}} - t_{\text{хл}})d\tau, \tag{10}$$

где $t_{\text{об}}$ – среднеобъемная температура тела, °C;

$t_{\text{пов}}$ – температура поверхности тела, °C.

Подставляя (9) в (10), получим

$$\varphi = \frac{A_{\text{пов}}}{A_{\text{об}}} = \frac{mcV}{\alpha S} = \frac{\Phi}{\mathrm{Bi}}\kappa\,;\ m = \frac{\lambda\kappa}{cR}, \tag{11}$$

где κ – некоторый параметр, который в квазиодномерном случае равен $\mu_1^{\,2}$, а для тел произвольной формы является некоторой функцией числа Bi и формы тела.

Коэффициент неоднородности температурного поля φ при $\mathrm{Bi} \to 0$ стремится к 1, следовательно, при этом $\kappa \sim \mathrm{Bi}/\Phi$. Таким образом, числа m, $A_{\text{пов}}$ и $A_{\text{об}}$ связаны соотношением (11), и, зная два из этих трех параметров, можно рассчитать третий.

Задачу (5) – (7), как известно [2], можно записать в вариационном виде:

$$\kappa = \underset{\Xi\in W}{MIN}\left\{-\int_0^1 \frac{d}{d\xi}\left(\xi^k\frac{d\Xi}{d\xi}\right)\Xi d\xi \Big/ \int_0^1 \Xi^2\xi^k d\xi\right\}, \tag{12}$$

где W – пространство функций, удовлетворяющих условиям (6) и (7).

Теперь необходимо выбрать аппроксимирующее выражение для функции $\Xi(\xi)$. При этом нужно исходить из удобства вычисления интегралов в выражении (12). Наиболее простым способом является степенная аппроксимация:

$$\Xi(\xi) \approx 1 - a\xi^b, \tag{13}$$

где a и b – некоторые положительные константы.

Теперь, во-первых, необходимо учесть, что функция (13) должна удовлетворять граничным условиям (6) и (7). Подставляя (13) в них, получим:

$$a = \frac{\mathrm{Bi}}{\mathrm{Bi}+b};\ \Xi(\xi) \approx 1 - \frac{\mathrm{Bi}\xi^b}{\mathrm{Bi}+b};\ b > 1. \tag{14}$$

Во-вторых, подставив (14) в (12), проинтегрировав и обозначив $R_1 = k + 2b + 1$ и $R_2 = k + 2b - 1$, получим

$$\kappa \approx \underset{b>1}{MIN}\frac{\mathrm{Bi}(\mathrm{Bi}+R_2)(k+1)(k+b+1)R_1}{R_2[2\mathrm{Bi}^2 + 2R_1\mathrm{Bi} + (k+b+1)R_1]}, \tag{15}$$

Итак, мы имеем стандартную задачу – нахождение минимума функции одной переменной. Дифференцируя (15) по b и приравнивая производную к 0, получим уравнение четвертого порядка:

$$\begin{aligned} &12b^4 + 2(8\mathrm{Bi} + 19k + 3)b^3 + \\ &+[4\mathrm{Bi}^2 + 8(3k-2)\mathrm{Bi} + (11k+7)(k-3)]b^2 + \\ &+2[2(k-1)\mathrm{Bi}^2 + 2(3k^2 - 6k - 5)\mathrm{Bi} + \\ &+(k+1)(k^2 - 10k - 3)]b + \\ &+(k+1)[(k-5)\mathrm{Bi}^2 + 2k(k-5)\mathrm{Bi} - 4k(k+1)] = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Уравнение (16) можно решить по формулам Феррари, однако результат будет слишком громоздким. Поэтому поступим иначе. Обозначим в формулах (17), (18), (19) $R_3 = \sqrt{2k+6}$. Заметим, что при $\mathrm{Bi} \to 0$ выражение (16) даст $\kappa \approx \mathrm{Bi}\,(k+1)$ вне зависимости от значения b. Таким образом, при малых значениях Bi результат несильно зависит от значения b. Поэтому в уравнении (16) перейдем к пределу $\mathrm{Bi} \to \infty$. В результате уравнение четвертого порядка перейдет в квадратное, корень которого (нам нужен корень $b > 1$):

$$b = \frac{R_3 - k + 1}{2}. \qquad (17)$$

Подставляя (17) в (15), окончательно получим:

$$\kappa \approx \frac{\mathrm{Bi}(k+1)(\mathrm{Bi} + R_3)(k + 2R_3 + 5)}{4\mathrm{Bi}^2 + 4(R_3 + 2)\mathrm{Bi} + R_3(k + 2R_3 + 5)}. \qquad (18)$$

Сравнение результатов вычислений по формуле (18) с точными значениями показывает, что они совпадают с погрешностью, не превышающей 1,5 %. Причем приближенная формула (18) всегда дает несколько завышенное значение κ, как и должно быть, поскольку истинное значение κ дает абсолютный минимум функционала (12), а соотношение (18) – лишь минимум в функциях вида (14). Кроме того, необходимо отметить, что наибольшая погрешность получается при бесконечном Bi, что подтверждает обоснованность использования выражения (17) при любых значениях Bi. Таким образом, формула (18) позволяет рассчитать коэффициент κ(Bi, Ф) для тел любой формы чисто теоретически, без эмпирических данных. Необходимо только знать коэффициент формы тела Ф, для определения которого следует лишь измерить элементарные геометрические параметры объекта: объем V, площадь поверхности S и характерный размер R.

Теперь, когда у нас имеется приближенное выражение для κ, рассмотрим вопрос об определении $A_{об}$. Здесь естественно использовать приближенное распределение температуры (13). Вначале определим коэффициент C_1 по соотношению (8):

$$C_1 \approx \frac{\int_0^1 \xi^k (1 - a\xi^b)\, d\xi}{\int_0^1 \xi^k (1 - a\xi^b)^2\, d\xi} = \frac{\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{a}{k+b+1}}{\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{2a}{k+b+1} + \dfrac{a^2}{R_1}}.$$

Далее определяем $A_{об}$, усредняя функцию (13):

$$A_{об} \approx C_1 \frac{\int_0^1 \xi^k \left(1 - a\xi^b\right) d\xi}{\int_0^1 \xi^k\, d\xi} =$$

$$= \frac{(k+1)\left(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{a}{k+b+1}\right)^2}{\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{2a}{k+b+1} + \dfrac{a^2}{R_1}}.$$

Ну и наконец, подставляя a и b из (14) и (17), получим:

$$A_{об} \approx \frac{(2\mathrm{Bi} + k + R_3 + 3)^2 R_3}{[4\mathrm{Bi}^2 + 4(R_3 + 2)\mathrm{Bi} + R_3(k + 2R_3 + 5)](k+3)}. \qquad (19)$$

Сравнение результатов вычислений по соотношению (19) с точными значениями дает погрешность, не превышающую 3%. Коэффициент $A_{пов}$ можно вычислять через $A_{об}$ по формуле (11). Таким образом, формулы (11), (18) и (19) дают нам необходимые значения m, $A_{пов}$ и $A_{об}$.

Теперь необходимое время охлаждения τ до требуемой конечной температуры $t_{кон}$ можно определить следующим образом:

$$\tau \approx \frac{cR^2}{\lambda\kappa} \ln\left\{A \frac{t_{нач} - t_{хл}}{t_{кон} - t_{хл}}\right\}. \qquad (20)$$

В качестве примера рассчитаем продолжительность предварительного охлаждения филе судака при его замораживании. Теплофизические параметры филе следующие: теплопроводность $\lambda = 0{,}53$ Вт/(м·°С); объемная теплоемкость $c = 3{,}5 \cdot 10^6$ Дж/(м³·°С); начальная температура филе рыбы $t_{нач} = 20$°С; необходимая конечная температура поверхности (криоскопическая температура) $t_{кон} = -1$ °С; температура хладоносителя $t_{хл} = -30$ °С; объем единичного объекта $V = 6{,}1 \cdot 10^{-4}$ м³; площадь поверхности одного филе $S = 7{,}6 \cdot 10^{-2}$ м²; характерный размер (половина толщины) $R = 1{,}25 \cdot 10^{-2}$ м; коэффициент формы Ф = 0,64, коэффициент теплоотдачи $\alpha = 20$ Вт/(м²·°С). Отсюда имеем: Bi = 0,47; $k = 0{,}56$; $\kappa = 0{,}65$; $A_{об} = 1$; $A_{пов} = 0{,}89$; $\tau = 680$ с = 11,3 мин.

Список литературы

1. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 1985.
2. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973.
3. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. – М.: Наука, 1977.