УДК 621.564

Математическое моделирование процесса движения газообразного хладагента в трубопроводах холодильных систем

Д-р техн. наук **Б.С. БАБАКИН**, *д-р техн. наук* **В.Ф. ШИРИКОВ**, *канд. техн. наук* **С.Б. БАБАКИН**
Московский государственный университет прикладной биотехнологии,
канд. техн. наук **Г.А. БЕЛОЗЕРОВ**
ВНИХИ

Mathematical analysis (the first approach of regular asymptotic expansions) is presented for the determination of the main parameters of the refrigerant vapor, moving along the tubes of the refrigerating system.

При эксплуатации холодильных систем одной из основных задач является обеспечение их безопасной работы. Наибольшее число неисправностей связано с возникновением влажного хода компрессора, приводящего к гидравлическим ударам, что вызвано в основном неправильной подачей хладагента в испарительную систему, резким колебанием тепловой нагрузки, вскипанием хладагента в аппаратах из-за резкого падения давления, неправильным монтажом трубопроводов и т.д. Отсутствие контроля параметров парообразного хладагента в трубопроводах (давления, расхода) с помощью ультразвуковых приборов приводит к снижению уровня безопасной эксплуатации холодильных систем.

В настоящей работе строится первое приближение регулярных асимптотических разложений для определения основных параметров парообразного хладагента (давление и расход пара), движущегося по трубопроводам холодильной системы. В ранее опубликованных работах [1,3] построены регулярная и сингулярная части асимптотического решения нестационарной задачи о движении парообразного хладагента в трубопроводах холодильной системы.

Запишем математическую постановку задачи в виде [2, 3]:

$$\varepsilon^2\left[\frac{\partial G}{\partial \tau}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{G^2}{p}\right)\right]+\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{G^2}{p}=0; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau}+\frac{\partial G}{\partial x}=0,$$

$$\text{при } x=0 \quad G(0,\tau)=G_c+\varepsilon q_1(0,\tau);$$

$$\text{при } x=l \quad G(l,\tau)=G_c+\varepsilon q_1(l,\tau); \qquad (2)$$

$$\text{при } \tau=0 \quad p(x,0)=p_c(x)+\varepsilon p_1(x,0),$$

где $\varepsilon^2 = 2d/(\lambda L)$;

d – диаметр трубопровода;

λ – коэффициент гидравлического сопротивления;

L – характерная длина трубопровода;

G и p – расход и давление газа соответственно;

G_c и p_c – те же параметры стационарного течения газа в трубопроводе;

τ – время ($0 < \tau \le t$);

x – текущая длина ($0 < x \le l$).

Первое приближение регулярной части асимптотического решения задачи представим в виде:

$$G(x,\tau)=G_c+\frac{\partial}{\partial t}\psi_1(x,\tau)\varepsilon; \qquad (3)$$

$$p(x,\tau)=p_c+\frac{\partial}{\partial x}\psi_1(x,\tau)\varepsilon.$$

Функция $\psi_1(x,\tau)$ в соответствии с [1] находится из решения задачи:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \tau}-\frac{1}{2G_0}\frac{\partial}{\partial x}p_c\frac{\partial \psi_1}{\partial x}=0, \qquad (4)$$

$$\text{при } x=0 \ \psi_1(0,\tau)=-\int_0^{\tau}[G(0,t)-G_c]dt=A^1(\tau); \qquad (5)$$

$G(0,\tau) - G_c = G^1(\tau)$,

при $x = 1$ $\quad \psi_1(l,\tau) = -\int_0^\tau [G(l,t) - G_c]dt = A^2(\tau)$;

$G(l,\tau) - G_c = G^2(\tau)$.

Так как возмущения, вызванные начальным полем $p(x,0)$, малы и быстро затухают [2, 3], то решение задачи должно определяться граничными условиями, поэтому положим:

$$\text{при } \tau = 0 \quad p(x,0) = p_c(x) \text{ или } \frac{\partial}{\partial x}\psi_1(x,0) = 0. \quad (6)$$

Тогда решение задачи (4) – (6) будет иметь вид:

$$\psi_1(p_c,\tau) = \frac{p_c - \underline{p}}{\overline{p} - \underline{p}} A^1(\tau) + \frac{\overline{p} - p_c}{\overline{p} - \underline{p}} A^2(\tau) + \\ + \int_0^\tau G_1(p_c, \tau - t) A^1(\tau) dt + \\ + \int_0^\tau G_2(p_c, \tau - t) A^2(\tau) dt, \quad (7)$$

где $G_1(p_c,\tau) = \int_{\underline{p}}^{\overline{p}} G(p_c, p_c', \tau) \frac{p_c' - \underline{p}}{\overline{p} - \underline{p}} dp_c'$;

$$G_2(p_c,\tau) = \int_{\underline{p}}^{\overline{p}} G(p_c, p_c', \tau) \frac{\underline{p} - p_c'}{\underline{p} - \overline{p}} dp_c';$$

$$G(p_c, p_c', \tau) = -p_c' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n(p_c')\alpha_n(p_c)}{\|\alpha_n\|^2} e^{-q^3\mu_n^2\tau}, \quad \tau > 0,$$

где $\alpha_n(p_c) = \sqrt{p_c} Z_{1/3}\left(\frac{2}{3}\mu_n p_c^{3/2}\right)$ – собственные функции, $Z_{1/3} = C_1 I_{1/3} + C_2 N_{1/3}$;

$I_{1/3}$, $N_{1/3}$ – цилиндрические функции первого и второго рода соответственно.

Рассмотрим течение газа по сети трубопроводов.

Систему трубопроводов представим ориентированным графом Γ. Пронумеруем вершины графа Γ от 1 до n, а ребра (арматура) – от 1 до m.

Введем следующие обозначения:

$\overline{G}^0 = (G_1^0, G_2^0, ..., G_n^0)$ – отбор пара в трубопроводах;

$\overline{G}^1 = (G_1^1, G_2^1, ..., G_m^1)$ – расход пара, поступающего в арматуру (ребро);

$\overline{G}^2 = (G_1^2, G_2^2, ..., G_m^2)$ – расход пара, вытекающего из арматуры (ребра);

$\overline{p}_1 = (p_{11}, p_{12}, ..., p_{1m})$ – давление пара по участкам.

Функцию $\psi_i(p_{ci},t)$ для i-го вентиля определим по формуле

$$\psi_i(p_{ci},t) = \frac{p_{ci} - \underline{p}_i}{\overline{p}_i - \underline{p}_i} A_i^1(\tau) + \frac{\overline{p}_i - p_{ci}}{\overline{p}_i - \underline{p}_i} A_i^2(\tau) + \\ + \int_0^\tau G_{1i}(p_{ci}, \tau - t) A_i^1(t) dt + \\ + \int_0^\tau G_{2i}^1(p_{ci}, \tau - t) A_i^2(t) dt. \quad (8)$$

Давление по i-му вентилю определим следующим образом:

$$p_{1i}(p_{ci},t) = -\frac{q_{ci}^2}{p_{ci}} \frac{\partial \psi_i}{\partial p_{ci}} = \\ = -\frac{q_{ci}^2}{p_{ci}(\overline{p}_i - \underline{p}_i)} \Big[A_i^1(\tau) - A_i^2(\tau) + \\ + \int_0^\tau G_{1i}^1(p_{ci}, \tau - t) A_i^1(t) dt + \\ + \int_0^\tau G_{2i}^1(p_{ci}, \tau - t) A_i^2(t) dt \Big], \quad (9)$$

где $G_{1i}^1 = \frac{\partial}{\partial p_{ci}}(G_{1i})$, $G_{2i}^1 = \frac{\partial}{\partial p_{ci}}(G_{2i})$.

Запишем условие баланса пара при прохождении через аппаратуру:

$$A^- \overline{G}^1 + A^+ \overline{G}^2 = q^0, \quad (10)$$

где $A^- + A^+ = A$;

A – матрица инциденций, а элементы матриц A^- и A^+ имеют вид:

$$a_{ij}^- = \begin{cases} 0, & \text{если } a_{ij} \neq -1; \\ a_{ij}, & \text{если } a_{ij} = -1; \end{cases}$$

$$a_{ij}^+ = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } a_{ij} = 1; \\ 0, & \text{если } a_{ij} \neq 1. \end{cases}$$

Введем матрицу A_1, соответствующую графу Γ_1, полученному из графа Γ путем исключения «висящих вершин», т.е. вершин, связанных с другими вершинами графа Γ только одним вентилем. Матрица инциденции A^1 графа Γ_1 получается из матрицы A путем исключения столбцов, содержащих только один ненулевой элемент.

Из условия непрерывности величины давления при прохождении через арматуру можно записать соотношение вида

$$p_{i_0}(a_{i_0 j}) = p_{i_0+\nu}(a_{i_0+\nu, j}),\ j=\overline{1,n}, \qquad (11)$$

где i_0 – номер первого ненулевого элемента матрицы A^1, т.е. $a^1_{i_0 j} \neq 0$ для всех j, $i_0 + \nu$ – номер следующего элемента.

$$p_i(a_{ij}) = \begin{cases} p_i(\overline{p}_i, \tau), & \text{если } a_{ij} = -1; \\ p_i(\underline{p}_i, \tau), & \text{если } a_{ij} = 1; \end{cases}$$

$\overline{p_i} = p_{0i}(0)$, $\underline{p_i} = p_{0i}(l_i)$,

l_i – длина i-го участка трубопровода до арматуры.

Представим первые слагаемые из соотношения (11) в виде

$$A_i^1(t) - A_i^2(t) = \int_0^\tau \delta(\tau - t)\left[A_i^1(t) - A_i^2(t)\right]dt. \qquad (12)$$

Далее подставим выражение (11) с учетом (12) в соотношение (9). Тогда получим интегральное выражение, справедливое для $t > 0$.

После незначительных преобразований имеем

$$\frac{q^2_{0i_0}}{p_{0i_0}(\overline{p}_{i_0} - \underline{p}_{i_0})}\Big\{\delta(\tau - t)[A^1_{i_0}(t) - A^2_{i_0}(t)] +$$
$$+G^1_{1i_0}\left[\frac{1}{2}(1+a_{i_0 j})l_{i_0}, \tau - t\right]\times$$
$$\times A^1_{i_0}(t) + G^1_{2i_0}\left[\frac{1}{2}(1+a_{i_0 j})l_{i_0}, \tau - t\right]A^2_{i_0}(t)\Big\} =$$
$$= \frac{q^2_{0i_0}}{p_{0i}(\overline{p}_i - \underline{p}_i)}\Big\{\delta(\tau - t)[A^1_{i_0+\nu}(t) - A^2_{i_0+\nu}(t)] + \qquad (13)$$
$$+G^1_{1,\tau_0+\nu}\left[\frac{1}{2}\left(1 + a_{i_0+\nu, j}\right)l_{i_0+\nu}, \tau - r\right]A^1_{i_0+\nu}(t) +$$
$$+G^1_{2,\tau_0+\nu}\left[\frac{1}{2}(1 + a_{i_0+\nu, j})l_{i_0+\nu}, \tau - r\right]A^2_{i_0+\nu}(t)\Big\}.$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$G^1_{kj}(\underline{p}_i, \tau) = G^1_{kj}[p_{0i}(l_i), \tau] = G^1_{kj}(l_i, \tau);$$

$$G^1_{kj}(\overline{p}_i, \tau) = G^1_{kj}[p_{0i}(0), \tau] = G^1_{kj}(0, \tau);\ k = 1, 2.$$

Система уравнений (10), (13) линейно независима и содержит $2m$ неизвестных A_i^1, A_i^2. Система (10) состоит из m уравнений, а система (13) включает $2m - k - n + k = 2m - n$ уравнений. Здесь k – количество трубопроводов, исходя из количества аппаратов (отделителей жидкости, ресиверов).

Система (10), (13) однозначно разрешима. Задаваясь начальными значениями давления и расхода, можно определить величины A_i^1, A_i^2 в любые моменты τ, где $0 < \tau \leq t$. Затем определяются функции $p_1(x,t)$ и $q_1(x,t)$ из соотношений:

$$p_1(x,\tau) = \frac{\partial \psi_1}{\partial x},\ G_1(x,\tau) = -\frac{\partial \psi}{\partial \tau}.$$

Таким образом, полученные регулярные асимптотические разложения позволяют определить основные характеристики пара в любой точке трубопроводов холодильной системы.

Список литературы

1. *Кафаров В.В., Дорохов И.Н., Шириков В.Ф., Шершков В.В.* О неизотермическом движении газа по сети с циклами // ДАН СССР. Серия Математическая физика. 1987. Т. 292. № 6.
2. *Шириков В.Ф., Бабакин Б.С.* Способ осреднения уравнений гидродинамики для расчета движения рабочих сред в холодильных системах // Вестник Международной академии холода. 2003. Вып.2.
3. *Яковлев Е.И., Шириков В.Ф., Шершков В.В., Иванов В.А. Ремезов В.В.* Управление системами трубопроводного транспорта. – М.: ВНИИОЭНГ, 1993.