

УДК 637.52.001.8

## Математическое моделирование процесса формирования криолитозоны во влагонасыщенных почвах

Д-р техн. наук **Е. В. СЕМЕНОВ**<sup>1</sup>, д-р техн. наук **Б. С. БАБАКИН**<sup>2</sup>,  
канд. техн. наук **С. Б. БАБАКИН**<sup>3</sup>, канд. техн. наук **А. Г. БЕЛОЗЁРОВ**<sup>4</sup>, **А. Н. СУЧКОВ**<sup>3</sup>  
<sup>1</sup>Московский государственный университет технологий и управления им. К. Г. Разумовского  
<sup>2</sup>Московский государственный университет пищевых производств  
<sup>3</sup>Всероссийский научно-исследовательский институт холодильной промышленности —  
филиал ФГБНУ «ФНЦ пищевых систем им. В. М. Горбатова» РАН  
<sup>4</sup>«Федеральный научный центр пищевых систем им. В. М. Горбатова» РАН  
E-mail: holod@mgupp.ru

*В работе приводится, разработанная авторами, математическая модель замораживания влагонасыщенных почв дисперсных пород и показывается кинетика процесса изменения температуры влагонасыщенной почвы по мере ее удаления от поверхности при понижении температуры окружающей среды. Сформулирована краевая задача по анализу кинетики процесса замораживания хладоносителя, результаты расчетов показали соответствие расчетных данных по теплопередаче холода от льда к воде физическому смыслу исследуемого явления. Представленный метод расчета прост и удобен, основан на применении современных информационных средств. Расчет можно проводить при обосновании процессов, используемых в технологии безмашинного охлаждения на базе аккумуляторов холода, в так называемых эвтектических плитах в авторефрижераторах. Также данный метод может быть использован и при математическом моделировании процессов в смежных объектах обработки объектов холодом.*

**Ключевые слова:** моделирование, лед, влагосодержание, теплоперенос, фазовый переход, плавление, замораживание.

### Информация о статье:

Поступила в редакцию 11.02.2020, принята к печати 16.09.2020

DOI: 10.17586/1606-4313-2020-19-4-85-90

Язык статьи — русский

### Для цитирования:

Семенов Е. В., Бабакин Б. С., Бабакин С. Б., Белозеров А. Г., Сучков А. Н. Математическое моделирование процесса формирования криолитозоны во влагонасыщенных почвах // Вестник Международной академии холода. 2020. № 4. С. 85–90. DOI: 10.17586/1606-4313-2020-19-4-85-90

## Mathematic modelling cryolithozone formation in waterlogged soils

*D. Sc.* **E. V. SEMENOV**<sup>1</sup>, *D. Sc.* **B. S. BABAKIN**<sup>2</sup>,  
*Ph. D.* **S. B. BABAKIN**<sup>3</sup>, *Ph. D.* **A. G. BELOZEROV**<sup>4</sup>, **A. N. SUCHKOV**<sup>3</sup>  
<sup>1</sup>Moscow State University of Technology and Management named after K. G. Razumovsky  
<sup>2</sup>Moscow State University of Food Production  
<sup>3</sup>All-Russian Scientific Research Institute of Refrigeration Industry — Branch of V. M. Gorbатов  
<sup>4</sup>Branch of V. M. Gorbатов Research Center for Food Systems of Russian Academy of Sciences  
E-mail: holod@mgupp.ru

*A mathematical model for freezing dispersive waterlogged soils, developed by the authors, is shown. The kinetic of temperature changes in waterlogged soil with the distance from the surface combined with the decrease of the environment temperature is demonstrated. The boundary problem of analyzing cooling medium freezing kinetic of has been formulated. The design data on the heat transfer from ice to water are experimentally shown to meet the physical sense of the phenomenon in question. The technique developed is simple and easy to use. It is based on the application of modern information technologies. The calculation can be made during substantiating the preparation of the so-called eutectic plates in refrigerator vans, which are used in the technology of machineless cooling based on holdover plates. The technique developed can also be used in mathematical modelling of the processes in the related fields of low-temperature treatment.*

**Keywords:** modelling, ice, moisture content, heat transfer, phase transfer, melting, freezing.

**Article info:**

Received 11/02/2020, accepted 16/09/2020

DOI: 10.17586/1606-4313-2020-19-4-85-90

Article in Russian

**For citation:**Semenov E. V., Babakin B. S., Babakin S. B., Belozеров A. G., Suchkov A. N. Mathematic modelling cryolithozone formation in waterlogged soils. *Journal of International Academy of Refrigeration*. 2020. No 4. p. 85–90.

DOI: 10.17586/1606-4313-2020-19-4-85-90

**Введение**

В настоящее время, в связи с подтвержденным общим повышением температуры тропосферы Земли, на основании данных многолетних наблюдений, возникает острая потребность в изучении закономерностей развития мерзлых увлажненных пород по годовому периоду, особенно в климатических условиях высоких широт планеты (рис. 1) [1]. Причем важно отметить, что управление процессом замораживания дисперсного влагонасыщенного грунта является одной из основ охраны природной среды в области образования мерзлых пород.

Исследования ученых в России и за рубежом подтверждают интерес к теплофизическим и инженерным исследованиям в данной области [2]–[5]. В работе [6], Ким Хюн Чол произведено математическое моделирование процесса промерзания грунтов, с целью совмещения в одном подходе точности и простоты оценки размеров зон промерзания грунтов.

В работах [7]–[13], с позиций физико-математического моделирования, задачи о формировании замороженной и охлаждаемой зон исследуемой среды трактуются как осложненные изменением агрегатного состояния среды проблемы теплообмена между выделенными зонами. Причем, на разделяющих зоны поверхностях, из-за фазового перехода, теплофизические коэффициенты на границах сред принимаются меняющимися скачкообразно, вследствие чего этим средам требуется дополнительная теплота (конденсация или испарение).

В исследованиях теоретического характера данные проблемы решаются на базе законов сохранения массы,

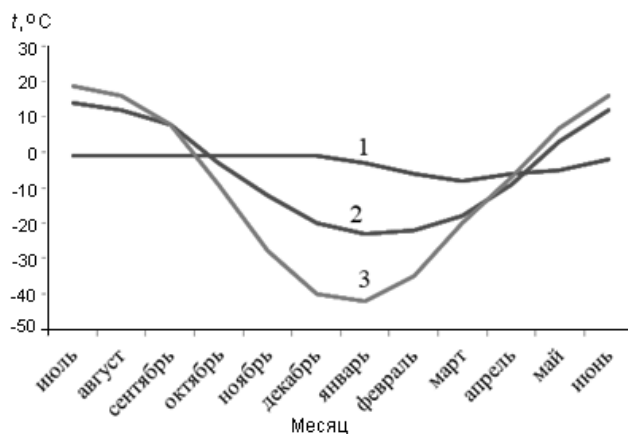


Рис. 1. Кривые изменения температур в зависимости от времени года в северо-восточной части Сибири: 1 — на глубине 2 м; 2 — на глубине 0,4 м; 3 — воздуха

Fig. 1. Temperature changes depending on the season in the South-East Siberia: 1 — at 2 m depth; 2 — at 0.4 m depth; 3 — in the air

импульса и энергии, а также — для замыкания этой системы — уравнение состояния и феноменологические уравнения Фика, Фурье, Ньютона. При этом, учитывая многопараметрический характер исследуемых задач, во многих случаях прибегают к использованию определенных опытным путем, типичных для конкретной проблемы, теплофизических характеристик. Однако, поскольку такой подход весьма сложен, часто исходят из основанных на возможно меньшем числе и существенных для наблюдаемого явления параметров упрощенных моделей и гипотез.

**Постановка задачи**

С целью обоснования процесса замораживания влагонасыщенных почв (дисперсных пород), занимающих полупространство  $0 < x < \infty$  (рис. 2) предложен простой и удобный, с применением современных информационных средств, способ расчета. Далее, для решения этой проблемы исходим из классической модели Ламе — Стефана.

Пусть, в полагаемом однородным и насыщенном влагой одномерном полупространстве II (рис. 2)  $x > 0$  выполняется начальное условие по распределению температуры  $t^2(x, \tau)$

$$t_2 = u_2 \text{ при } t=0 \text{ (} x > 0 \text{),} \quad (1)$$

где  $t$  — время проведения процесса теплообмена между льдом  $t_1$  и хладоносителем  $t_2$  (водой), содержащихся в пористой структуре почвы.

И пусть на границе  $x=0$  в период времени  $t > 0$  удовлетворяется граничное условие

$$t_1 = u_1 \text{ при } x=0 \text{ (} 0 \leq \tau < \infty \text{),} \quad (2)$$

где  $u_1$  — температура льда.

Причем, предполагается, что  $u_1 \ll u_0 = u_{кр}$ ,  $u_{кр}$  — криоскопическая температура (температура плавления льда), и для простоты расчета величины  $u_1$  и  $u_2$  в соотношениях (1) и (2) считаются постоянными.

В принятых условиях по геометрии занимаемого грунтом пространства в качестве границы (фронта) промерзания

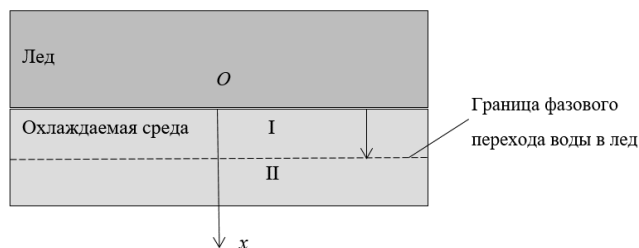


Рис. 2. Схема к расчету процесса замерзания грунта  
Fig. 2. The scheme of soil freezing

охлаждаемой влаги принимается перемещающаяся во времени разделяющая зоны I и II плоскость (рис. 2)

$$x = \omega(\tau), \tag{3}$$

на которой, в силу закона сохранения энергии, по высоте объема  $x > 0$  выполняется условие теплового баланса Стефана

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2) \right]_{x=\omega(\tau)} = r \rho m \frac{dx}{dt}, \tag{4}$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, t_1, t_2$  — коэффициент теплопроводности и температура зоны I (льда) и зоны II (воды), соответственно;  $r$  — удельная теплота плавления льда;  $\rho$  — плотность воды;  $m$  — пористость (объемное влагосодержание) почвы.

В таком случае, математическая задача о моделировании кинетики процесса замораживания хладоносителя может быть сформулирована следующим образом: требуется найти функции  $t_1(x, \tau)$  и  $t_2(x, \tau)$ , удовлетворяющие уравнению Фурье, соответственно, в областях I, II (рис. 1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_1}{\partial \tau} &= a_1 \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2}, & 0 < x < \omega(\tau); \\ \frac{\partial t_2}{\partial \tau} &= a_2 \frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2}, & \omega(\tau) < x < \infty, \end{aligned} \tag{5}$$

где  $a_1, a_2$  — коэффициент температуропроводности льда и воды в областях I, II, соответственно, а также соответствующий начальному условию (1), граничному условию (2) и, кроме того, на границе замерзания (3) — естественному условию согласования температуры в зонах I, II:

$$t_1(x, \tau) = t_2(x, \tau) = u_0 \text{ при } x = \omega(\tau). \tag{6}$$

Таким образом, на базе граничных условий (1) и (6), начального условия (2), для системы дифференциальных уравнений (5) сформулирована краевая задача по анализу кинетики процесса замораживания хладоносителя в полупространстве  $x > 0$ .

### Решение задачи

Поскольку объектом количественного анализа проблемы является процесс теплопереноса в области  $x > 0$  на базе дифференциальных уравнений (5) в частных производных, то, тем самым, создается предпосылка поиска решения задачи, зависящей не от двух аргументов  $x$  и  $t$ , а от одной, автомодельной, переменной  $z$ . В результате чего, система (5) преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений с общим решением вида:

$$t_1(x, \tau) = A_1 + B_1 \operatorname{erf}(\zeta_1); \tag{7}$$

$$t_2(x, \tau) = A_2 + B_2 \operatorname{erf}(\zeta_2), \tag{8}$$

где  $A_1, B_1, A_2, B_2$  — подлежащие определению произвольные постоянные величины;  $\operatorname{erf}(x)$  — функция Крампа (интеграл ошибок),

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-x^2) dx, \tag{9}$$

$$\zeta_1 = x/(4a_1\tau)^{1/2}, \quad \zeta_2 = x/(4a_2\tau)^{1/2}, \tag{10}$$

$\zeta_1, \zeta_2$  — автомодельные переменные для зон I и II.

Удовлетворяя, с использованием подстановки  $\zeta = x/(a\tau)^{1/2}$ , граничным условиям (1), (6) и начальному условию (2), для определения постоянных величин  $A_1, B_1, A_2, B_2$ , в явной форме получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A_2 + B_2 = u_2, & A_1 = u_1; \\ A_1 + B_1 \operatorname{erf}[\omega/(4a_1\tau)^{1/2}] = u_0; \\ A_2 + B_2 \operatorname{erf}[\omega/(4a_2\tau)^{1/2}] = u_0, \end{cases} \tag{11}$$

где в силу специфики принятых выражений (10) два последних соотношения возможны лишь в том случае, если, в соответствии с (3), принимается условие

$$\omega(\tau) = 2\sigma\tau^{1/2}, \tag{12}$$

где  $\sigma$  — подлежащая определению постоянная величина.

С учетом выражения (12) для параметра  $s$  условия (11) записываются в виде:

$$\begin{cases} A_1 = u_1, & A_2 + B_2 = u_2; \\ A_1 + B_1 \operatorname{erf}(\sigma/a_1^{1/2}) = u_0; \\ A_2 + B_2 \operatorname{erf}(\sigma/a_2^{1/2}) = u_0. \end{cases}$$

Откуда находим

$$\begin{cases} A_1 = u_1, & B_1 = (u_0 - u_1)/\operatorname{erf}(\sigma/a_1^{1/2}); \\ B_2 = (u_2 - u_0)/\operatorname{erfc}(\sigma/a_2^{1/2}), & A_2 = u_0 - B_2 \operatorname{erf}(\sigma/a_2^{1/2}); \end{cases} \tag{13}$$

где  $\operatorname{erfc}(\sigma/a_2^{1/2}) = 1 - \operatorname{erf}(\sigma/a_2^{1/2})$ .

Имея в виду зависимость  $d[\operatorname{erf}(x)]/dx = 2\pi^{-1/2}\exp(-x^2)$ , на основе (7), (8) определяются входящие в условие (4) Стефана производные

$$\partial t_1/\partial x = B_1 \exp[-x^2/(4a_1\tau)]/(a_1\tau\pi)^{1/2}; \tag{14}$$

$$\partial t_2/\partial x = B_2 \exp[-x^2/(4a_2\tau)]/(a_2\tau\pi)^{1/2}, \tag{15}$$

вследствие чего, согласно уравнению (11), на плоскости  $x = \omega(\tau) = 2\sigma\tau^{1/2}$  выражения производных (14), (15) принимают форму

$$\partial t_1/\partial x = B_1 \exp(-\sigma^2/a_1)/(a_1\tau\pi)^{1/2};$$

$$\partial t_2/\partial x = B_2 \exp(-\sigma^2/a_2)/(a_2\tau\pi)^{1/2}.$$

И поэтому, с учетом формул (4), (7), (8), (12), приходим к характеристическому относительно параметра  $s$  уравнению

$$B_1 \exp(-\sigma^2/a_1) \lambda_1 a_1^{-1/2} - B_2 \exp(-\sigma^2/a_2) \lambda_2 a_2^{-1/2} - \pi^{1/2} r \rho m = 0, \tag{16}$$

где  $B_1, B_2$  вычисляются согласно выражению (13).

В результате чего, в соответствии с (7), (8), при расчете поля температуры в полупространстве  $x > 0$  используются зависимости:

$$t_1(x, \tau) = A_1 + B_1 \operatorname{erf}(\zeta_1), \tag{17}$$

$$t_2(x, \tau) = A_2 + B_2 \operatorname{erf}(\zeta_2), \tag{18}$$

где  $A_1, B_1, A_2, B_2$ , по-прежнему, определяются по формулам (13), однако при значении параметра  $\sigma$  — собственного значения краевой задачи (1), (2), (5), (6) — переменные  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  принимаются по (10).

При этом следует иметь в виду, что, согласно соотношению (16), в этом случае параметр  $s$ , дополнительно

к прежним физико-механическим параметрам процесса, зависит и от величин  $r$  — удельной теплоты плавления льда и  $m$  — пористости почвы.

На базе выражения (14) может быть вычислен поток  $q$  теплоты от хладоносителя ко льду

$$q(\tau) = \lambda_1 \partial t_1(0, \tau) / \partial x = \lambda_1 B_1 / \sqrt{\pi a_1 \tau}$$

и следующая отсюда величина  $Q$  отдачи теплоты льдом за время  $t$

$$Q(\tau) = \int_0^\tau q(\tau) d\tau = 2\lambda_1 B_1 \sqrt{\tau / (\pi a_1)}. \quad (19)$$

На основе зависимостей (17)–(19) для насыщенного водой почв в полупространстве  $0 < x < \infty$  может быть проведено физико-математическое моделирование стратификации температуры по глубине  $x$  почвы и периоду  $\tau$  времени процесса замораживания в нем грунтовой воды, а также расчет потери льдом теплоты.

### Численный эксперимент

Количественное моделирование процесса охлаждения грунтовой воды по зависимостям (17)–(19) осуществ-

ляли, используя процедуры среды Mathcad на базе следующих физико-механических и геометрических параметров процесса обработки.

Температура, соответственно, на поверхности льда  $u_1 \in [-20, -10 \text{ }^\circ\text{C}]$ , в начальный момент времени по всему объему хладоносителя температура  $u_1 \in [10, 20 \text{ }^\circ\text{C}]$ , фазового перехода воды в лед  $u_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ ; коэффициент теплопроводности для областей I и II  $\lambda_1 = 2,39 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ ;  $\lambda_2 = 0,597 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ ; скрытая теплота фазового перехода воды в лед  $r = 0,33 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$ , плотность воды  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ . Влажность почвы варьировалось в области значений  $m \in [30; 90\%]$ , время обработки холодом хладоносителя  $\tau = 2,5; 5 \text{ мин}$ , расчетная глубина промерзания грунтовой воды  $x \in [0; 0,015 \text{ м}]$ .

Результаты расчета, отраженные графиками рисунков 3–6, выявляют соответствие расчетных данных по теплопередаче холода от льда к воде физическому смыслу исследуемого явления.

А именно, имеет место естественное продвижение по глубине почвы с течением времени фронта промерзания (рис. 3) и убывание, с ростом влагосодержания  $m$  почвы характеризующего интенсивность процесса теплообмена (с точки зрения его затухания) — параметра  $\sigma$  — собственного значения краевой задачи (рис. 4).

Кроме того, из габитуса кривых графиков рис. 5 вытекает, что, с одной стороны, с ростом координаты  $x$

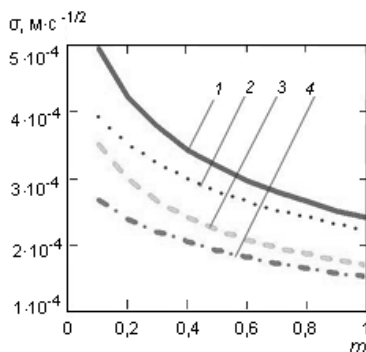


Рис. 3. Изменение параметра  $\sigma$  от влагосодержания  $m$  при различной величине температуры  $t_1$  на поверхности грунта и начальной температуры  $t_2$  по его глубине

Fig. 3. Dependence of  $\sigma$  on the moisture content  $m$  at various temperatures  $t_1$  on the soil surface and initial temperature  $t_2$  over the soil depth

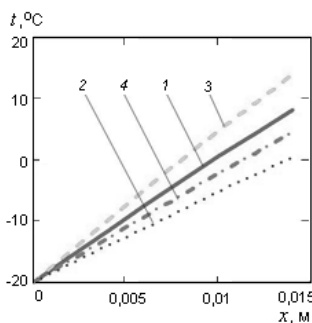


Рис. 5. Зависимости температуры  $t$  грунта от глубины  $x$  при различной величине влагосодержания  $m$  грунта и периода  $\tau$  проведения процесса промерзания ( $t_1 = -20 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ;  $m = 50\%$ : 1 —  $\tau = 2,5 \text{ мин}$ ; 2 —  $\tau = 5 \text{ мин}$ ;  $m = 90\%$ : 3 —  $\tau = 2,5 \text{ мин}$ ; 4 —  $\tau = 5 \text{ мин}$ )

Fig. 5. Dependence of soil temperature  $t$  on the depth  $x$  at various values of the soil moisture content  $m$  and freezing time  $\tau$  ( $t_1 = -20 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ;  $m = 50\%$ : 1 —  $\tau = 2.5 \text{ min}$ ; 2 —  $\tau = 5 \text{ min}$ ;  $m = 90\%$ : 3 —  $\tau = 2.5 \text{ min}$ ; 4 —  $\tau = 5 \text{ min}$ )

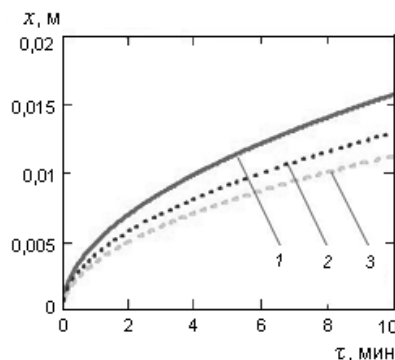


Рис. 4. Изменение глубины промерзания грунта от продолжительности процесса заморзания (1 —  $m = 30\%$ ; 2 —  $m = 60\%$ ; 3 —  $m = 90\%$ )

Fig. 4. Dependence of soil freezing depth on the freezing time (1 —  $m = 30\%$ ; 2 —  $m = 60\%$ ; 3 —  $m = 90\%$ )

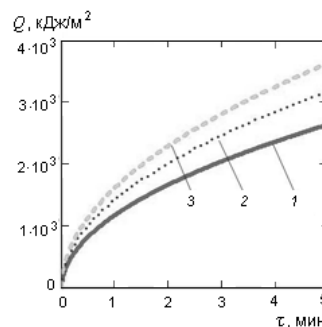


Рис. 6. Зависимости количества  $Q$  теплоты плавления льда от времени  $\tau$  проведения процесса охлаждения при различной величине влагосодержания  $m$  грунта (1 —  $m = 30\%$ ; 2 —  $m = 60\%$ ; 3 —  $m = 90\%$ )

Fig. 6. Dependence of ice melting heat quantity  $Q$  on the cooling time  $\tau$  at various values of the soil moisture content (1 —  $m = 30\%$ ; 2 —  $m = 60\%$ ; 3 —  $m = 90\%$ )

(т. е., по мере удаления от льда), как и должно быть, температура хладоносителя приближается к своему исходному значению в грунте. С другой стороны, процесс теплопередачи затухает вместе с увеличением длительности  $t$  его проведения (например, кривая 1 расположена выше кривой 2), но ускоряется, когда влагосодержание  $m$  почвы возрастает (график 1 выше графика 3), т. е., более влажная почва замерзает быстрее менее увлажненной. Что, с позиций закона сохранения энергии, корреспондирует с данными графиков рис. 3, где, наоборот, отмечается ускоренное проникновение фронта промерзания в почву вместе с увеличением в нем влагосодержания.

Причем, отраженные графически рис. 6, данные численного эксперимента согласуются с результатами рис. 5: количество  $Q$  теплоты при плавлении льда растет вместе со временем и увеличением влагосодержания  $m$  почвы (в частности, кривая 2 выше кривой 1).

Дополнительно отметим, что справедливый в рамках модели полупространства алгоритм может быть ис-

пользован и в случае количественного анализа задачи о расчете процесса промерзания тел с близкой по форме рассмотренной в статье геометрической структурой.

Например, предложенный в данной работе расчет можно проводить при обосновании процесса подготовки используемых в технологии безмашинного охлаждения на базе аккумуляторов холода, так называемых эвтектических плит (немалой толщиной и при условии влагосодержания в них  $m=100\%$ ) в авторефрижераторах.

### Выводы

Таким образом, с позиций выявленной адекватности результатов численного эксперимента с физическим смыслом исследуемого процесса промерзания влагонасыщенных почв, установлена правомерность использования для теоретического анализа данного процесса модели Ламе–Стефана. Предложенный в работе алгоритм может быть применен и при математическом моделировании процессов в смежных объектах обработки объектов холодом.

### Литература

1. Кудрявцев В. А., Полтев Н. Ф., Романовский Н. Н., Кондратьева К. А., Меламед В. Г., Гарагуля Л. С. Мерзлотоведение. М.: изд-во Моск. ун-та, 1981. 240 с.
2. Monrabal-Martinez C., Scibilia E., Maus S., Muthanna T. M. Infiltration response of adsorbent amended filters for stormwater management under freezing/thawing conditions. // Water. 2019. vol. 11. P. 2619. <https://doi.org/10.3390/w11122619>
3. Harlan R. L. Analysis of coupled heat-fluid transport in partially frozen soil. // Water Resour. Res. 1973. Vol. 9. P. 1314–1323. <https://doi.org/10.1029/WR009i005.p01314>
4. Hongzhang C. Research on Fields Coupling in Saturated Granular Soil Freezing Process; Institute of Engineering Thermophysics, Chinese Academy of Sciences: Beijing, China, 2016.
5. Yin X., Liu E., Song B., Zhang D. Numerical analysis of coupled liquid water, vapor, stress and heat transport in unsaturated freezing soil. // Cold Reg. Sci. Technol. 2018. 155. P. 20–28. <https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2018.07.008>
6. Ким Хюн Чол. Совершенствование методов расчета глубины сезонного промерзания пучинистых грунтов земляного полотна железнодорожного пути. / дис. к. т. н., Новосибирск, 2013.
7. Рубинштейн Л. И. Проблема Стефана. Рига: Знайзне, 1967. 458 с.
8. Мейрманов А. М. Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986. 239 с.
9. Solonnikov V. A., Frolova E. V. Lp-theory for the Stefan problem // J. Math. Sci. 2000. V. 99, iss. 1. P. 989–1006.
10. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
11. Javierre-Pérez E. Literature Study: Numerical methods for solving Stefan problems. Delft University of Technology, 2003. 94 p.
12. Caldwell J., Kwan Y. Y. Numerical methods for one-dimensional Stefan problems // Commun. Numer. Meth. Engng. 2004. No 20. P. 535–545.
13. Красношлык Н. А., Богатырёв А. О. Численное решение задач с подвижными межфазными границами // Вісник Черкаського університету. Серія «Прикладна математика. Інформатика». 2011. Т. 194. С. 16–31.

### References

1. Kudryavtsev V. A., Poltev N. F., Romanovsky N. N., Kondratieva K. A., Melamed V. G., Garagulya L. S. permafrost Studies. University press, 1981. 240 p. (in Russian)
2. Monrabal-Martinez C., Scibilia E., Maus S., Muthanna T. M. Infiltration response of adsorbent amended filters for stormwater management under freezing/thawing conditions. Water. 2019. vol. 11. P. 2619. <https://doi.org/10.3390/w11122619>
3. Harlan R. L. Analysis of coupled heat-fluid transport in partially frozen soil. Water Resour. Res. 1973. Vol. 9. P. 1314–1323. <https://doi.org/10.1029/WR009i005.p01314>
4. Hongzhang C. Research on Fields Coupling in Saturated Granular Soil Freezing Process; Institute of Engineering Thermophysics, Chinese Academy of Sciences: Beijing, China, 2016.
5. Yin X., Liu E., Song B., Zhang D. Numerical analysis of coupled liquid water, vapor, stress and heat transport in unsaturated freezing soil. Cold Reg. Sci. Technol. 2018. 155. P. 20–28. <https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2018.07.008>
6. Kim Hyun-Chol. Improvement of methods for calculating the depth of seasonal freezing of heaving soils of the railway trackbed. / dis. candidate of technical Sciences, Novosibirsk, 2013. (in Russian)
7. Rubinstein L. I. The Stefan Problem. Riga: Snizne, 1967. 458 p. (in Russian)
8. Meyrmanov A. M. The Stefan Problem. Novosibirsk: Nauka, 1986. 239 p. (in Russian)
9. Solonnikov V. A., Frolova E. V. Lp-theory for the Stefan problem. J. Math. Sci. 2000. V. 99, iss. 1. P. 989–1006.
10. Samarskiy A. A., Vabishchevich P. N. Computational heat transfer, Moscow: Editorial URSS, 2003, 784 p. (in Russian)
11. Javierre-Pérez E. Literature Study: Numerical methods for solving Stefan problems. Delft University of Technology, 2003. 94 p.
12. Caldwell J., Kwan Y. Y. Numerical methods for one-dimensional Stefan problems. Commun. Numer. Meth. Engng. 2004. No 20. P. 535–545.
13. Krasnozhlyk N. A., Bogatyrev A. A. Numerical solution of problems with mobile interphase boundaries. Visnik Cherkassky University. Series «Applied Mathematics. Computer science». 2011. vol. 194. pp. 16–31.

## Сведения об авторах

**Семенов Евгений Владимирович**

Д. т. н., профессор кафедры технологии продуктов из растительного сырья и парфюмерно-косметических изделий Московского государственного университета технологий и управления им. К. Г. Разумовского, Россия, Москва, ул. Земляной Вал, 73, sem-post@mail.ru

**Бабакин Борис Сергеевич**

Д. т. н., профессор кафедры инженерии процессов, аппаратов, холодильной техники и технологий Московского государственного университета пищевых производств, 125080, г. Москва, Волоколамское шоссе, 11, holod@mgupp.ru

**Бабакин Сергей Борисович**

к. т. н., Всероссийский научно-исследовательский институт холодильной промышленности (ВНИХИ) — филиал ФГБНУ «ФНЦ пищевых систем им. В. М. Горбатова» РАН, 127422, г. Москва, ул. Костякова, д. 12, holod@mgupp.ru

**Белозеров Антон Георгиевич**

К. т. н., заместитель директора по работе с филиалами ФГБНУ «ФНЦ пищевых систем им. В. М. Горбатова» РАН, 109316, Москва, ул. Талалихина, 26, a.belozеров@fncps.ru

**Сучков Александр Николаевич**

Инженер, Всероссийский научно-исследовательский институт холодильной промышленности (ВНИХИ) — филиал ФГБНУ «ФНЦ пищевых систем им. В. М. Горбатова» РАН, 127422, г. Москва, ул. Костякова, д. 12, alexandr-truba@yandex.ru

## Information about authors

**Semenov Evgeny V.**

D. Sc., Professor of the Department Technology of products from vegetable raw materials and perfumery and cosmetic products, K. G. Razumovsky Moscow State University of Technologies and Management, Russia, Moscow, Zemlyanoy Val St, 73, sem-post@mail.ru

**Babakin Boris S.**

D. Sc., Professor of the Department of process, apparatus, refrigeration and technology engineering of Moscow State University of Food Production, Russia, 125080, Moscow, Volokolamskoe shosse, 11, holod@mgupp.ru

**Babakin Sergey B.**

Ph. D., All-Russian Scientific Research Institute of Refrigeration Industry — Branch of V. M. Gorbato Research Center for Food Systems of Russian Academy of Sciences, Russia, 127422, Moscow, Kostyakova str., 12, holod@mgupp.ru

**Belozеров Anton G.**

Ph. D., Deputy Director for work with branches of Federal State Budgetary Scientific Institution «V. M. Gorbato Federal Research Center for Food Systems of Russian Academy of Sciences», Russia, 109316, Moscow, Talalikhina str., 26, a.belozеров@fncps.ru

**Suchkov Alexander N.**

Engineer, All-Russian Scientific Research Institute of Refrigeration Industry — Branch of V. M. Gorbato Research Center for Food Systems of Russian Academy of Sciences, Russia, 127422, Moscow, Kostyakova str., 12, alexandr-truba@yandex.ru



**UzProdExpo**

17-я Международная специализированная выставка пищевой промышленности и продуктов питания

**UzProdExpo – 2021**

**24–26 ноября 2021 г**

Выставка **UzProdExpo** проводится ежегодно с 2004 г. при поддержке Министерства сельского хозяйства Республики Узбекистан. Актуальность проведения выставки обусловлена стремительным развитием пищевой и перерабатывающей промышленности. Основная задача выставки — создание платформы для эффективной деловой коммуникации с производителями продукции, оборудования для переработки, представить в рамках выставки весь технологический процесс производства продуктов питания, от переработки сырья до получения окончательного упакованного продукта.

**Основные тематические разделы:**

- Пищевая промышленность
- Торговое и холодильное оборудование
- Тара и упаковка
- Продукты питания и напитки

**Место проведения выставки:**

НБК «УзЭкспоЦентр», Республика Узбекистан

**Руководитель проекта:**

Гульшан Чалова

Тел.: +998-71 238-59-59

Факс: +998-71 238-59-59

Моб.: +998-93 390 01 79

E-mail: info@ieg.uz; info@expouz.uz

[www.ieg.uz](http://www.ieg.uz)