

УДК 539.2/6,629.5

Изгиб льда как упруго-пластичного тела при взаимодействии с гидротехническими сооружениями, судами и на ледовых переправах

Канд. техн. наук С. В. КОШКИН*, д-р техн. наук И. А. ВЕПРИНЯК

Военный институт (ЖДВ и ВОСО) Военной академии МТО им. генерала А. В. Хрулёва

*E-mail: sergey.koshkin1950@yandex.ru

В реальных условиях ледовые поля деформируются и разрушаются в результате изгиба под действием нагрузок. Обычно практикой рассмотрения задачи изгиба являются приемы упрощения. Для решения задач упруго-пластичного деформирования льда при изгибе описываются эпюры напряжений в зонах растяжения и сжатия образцов льда постоянной солености и температуры. Реальный лед обладает значительной изменчивостью температуры и солености по его толщине и эпюры напряжений представлены в виде параболической аппроксимации с использованием приемов наращивания толщины льда. Это позволяет определить положение нейтрального слоя и погонный изгибающий момент. Процесс разрушения льда при изгибе является многоступенчатым. В статье показано, что разделение льда радиальными трещинами на клиновидные сектора происходит из-за нарушения условий совместности деформации (сплошности) и приводит к дальнейшему одноосному напряженному состоянию — изгибу клиньев на упругом основании. Подробно рассматриваются задачи изгиба этих клиньев с получением конечных инженерных формул для разрушающих нагрузок. Изложение материала статьи сопровождается численным анализом результатов.

Ключевые слова: изгиб льда, растяжение и сжатие, нейтральный слой, системы трещин, изгиб клиньев, упругое основание, разрушающие нагрузки.

Информация о статье:

Поступила в редакцию 07.04.2025, одобрена после рецензирования 12.06.2025, принята к печати 20.06.2025

DOI: 10.17586/1606-4313-2025-24-3-98-111

Язык статьи — русский

Для цитирования:

Кошкин С. В., Веприяк И. А. Изгиб льда как упруго-пластичного тела при взаимодействии с гидротехническими сооружениями, судами и на ледовых переправах. // Вестник Международной академии холода. 2025. № 3. С. 98–111. DOI: 10.17586/1606-4313-2025-24-3-98-111

Bending of ice as an elastic-plastic body under interaction with hydraulic structures, ships, and ice crossings

Ph. D. S. V. KOSHKIN*, D. Sc. I. A. VEPRINYAK

Military Institute (of Railway Troops and Military Transport) of Khrulev Military Academy of Logistics

*E-mail: sergey.koshkin1950@yandex.ru

In real conditions, ice fields deform and break due to bending under applied loads. Typically, solving bending problems involves simplifications. To address the issues of elastic-plastic deformation of ice under bending, stress distribution diagrams are described in the tensile and compressive zones of ice samples with constant salinity and temperature. Real ice exhibits significant variability in temperature and salinity across its thickness, and the stress distributions are represented using parabolic approximations with thickness growth techniques. This approach allows determining the position of the neutral layer and the bending moment per unit width. The process of ice failure under bending is multi-stage. The article demonstrates that the formation of radial cracks dividing the ice into wedge-shaped sectors occurs due to the violation of deformation compatibility conditions (continuity) and leads to a further uniaxial stress state — bending of the wedges on an elastic foundation. The bending behavior of these wedges is analyzed in detail, resulting in final engineering formulas for failure loads. The material presented in the article is accompanied by a numerical analysis of the results.

Keywords: ice bending, tension and compression, neutral layer, crack systems, wedge bending, elastic foundation, destructive loads.

Article info:

Received 07/04/2025, approved after reviewing 12/06/2025, accepted 20/06/2025

DOI: 10.17586/1606-4313-2025-24-3-98-111

Article in Russian

For citation:

Koshkin S. V., Veprinyak I. A. Bending of ice as an elastic-plastic body under interaction with hydraulic structures, ships, and ice crossings. *Journal of International Academy of Refrigeration*. 2025. No 3. p. 98-111. DOI: 10.17586/1606-4313-2025-24-3-98-111

Введение

Механическое воздействие гидротехнических сооружений, судов и вертикальных нагрузок на лед требуют знания особенностей его поведения под нагрузкой. Ледовые поля деформируются в результате изгиба под действием вертикальных нагрузок и кромочных моментов. Даже образцы льда стабильной структуры, солёности и температуры являются упруго-пластичным телом, а их поведение в зонах растяжения и сжатия описывается нелинейными эпюрами напряжений.

Поля льда по толщине имеют разнородную структуру и значительные градиенты температуры и солёности, что требует послойного (по горизонтам) учета изменения механических характеристик льда. В целом изгиб полей льда рассматривается как изгиб трансверсально-изотропной жесткой пластины на упругом основании Винклера типа [1].

Настоящая статья является конечной в цикле работ [2]–[6], завершающей исследования авторов по изгибу льда как упруго-пластичного тела. В работе [6] были получены математические модели, описывающие диаграммы напряжений льда $\sigma_i(\varepsilon_i)$ при сжатии и растяжении ($i=1$ — относится к сжатию; 2 — к растяжению):

— в виде полинома

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_{pi}} = \frac{E_{ю}}{E_i} \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{pi}} \right) \left[1 - \left(1 - \frac{E_i}{E_{ю}} \right) \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{pi}} \right)^{E_i/E_{ю}} \right], \quad (1)$$

и в логарифмическом виде

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_{pi}} = \frac{E_{ю}}{E_i} C_2^{-1} \ln \left(C_2 \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{pi}} + 1 \right). \quad (2)$$

Здесь $E_{ю}$ и E_i — модуль Юнга и секущий модуль (модуль деформации) в момент разрушения льда, соответственно; σ_{pi} и ε_{pi} — предел прочности и относительная деформация льда в момент его разрушения.

Коэффициент C_2 в формуле (2) кусочно аппроксимируется линейными зависимостями [6]:

$$\begin{aligned} C_2 &= 3,1(E_{ю}/E_i - 1,13) \text{ для } E_{ю}/E_i \in (1,5; 4); \\ C_2 &= 4,5(E_{ю}/E_i - 2) \text{ для } E_{ю}/E_i \in (4; 12). \end{aligned} \quad (3)$$

В работе [6] предложен теоретический способ прогнозирования диаграммы при растяжении льда пересчетом с аналогичной при его сжатии. Установлено, что отношение предельных относительных деформаций льда равно:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p2}/\varepsilon_{p1} &= 0,7 + 0,05 E_{ю}/E_2 \text{ — для зернистого;} \\ \varepsilon_{p2}/\varepsilon_{p1} &= 0,85 + 0,05 E_{ю}/E_2 \text{ — для конжеляционного;} \\ \varepsilon_{p2}/\varepsilon_{p1} &= 1,55 + 0,12 E_{ю}/E_2 \text{ — при чисто упругом сжатии льда } (E_{ю}/E_1 = 1). \end{aligned} \quad (4)$$

Цель и задачи исследования

Изучение деформирования и разрушения упруго-пластичного льда при изгибе является актуальным для решения задач взаимодействия гидротехнических сооружений, судов с полями дрейфующего и припай-

ного льда. В этом процессе необходимо последовательно:

— разработать математическую модель деформирования реального льда в упруго-пластичной зоне в связи с отказом от гипотезы Кирхгофа (прямых нормалей) для упругих тел;

— определить зависимости (эпюры) нормальных напряжений в сечениях образцов и реального льда в целом. На этой базе определить положение нейтрального слоя и значение изгибающего момента;

— физически описать этапы последовательного разрушения полей льда с образованием системы радиальных и тангенциальных (кольцевых) трещин;

— решить задачи по изгибу клиновидных секторов льда на упругом основании, как второго этапа разрушения льда;

— апробировать полученные расчетные зависимости с экспериментальными данными и аналогичными формулами для условно упругого льда.

Этим в совокупности и в частностях определяется новизна представляемой работы.

Деформация льда.

Чистый изгиб образцов льда

Простейшей моделью деформирования льда является закон Гука: $\sigma_i = E_i \varepsilon_i$. При этом, в соответствии с гипотезой Кирхгофа (прямых нормалей), деформация льда определяется линейным законом $\varepsilon_i = \omega''(z)z$ для упругих тел. Для упруго-пластичных тел разработаны [6] функции напряжений (1) и (2), которые определяются упругими характеристиками льда $E_{ю}$, E_i , предельной ε_{pi} и текущей ε_i относительной деформацией льда.

Простейшим случаем изгиба льда является чистый изгиб. Схема нагружения ледовой балки $l \times b \times H$, выпиленной из массива льда, при чистом изгибе показана на рис. 1, а. Он отличается отсутствием в зоне разрушения при изгибе перерезывающей силы Q , что обуславливает минимальное влияние касательных напряжений. Поэтому секция ледовых проблем МАГИ обуславливает применение именно этой схемы при испытаниях на изгиб балок, выпиленных из льда [7]. В этом случае предел прочности при изгибе $\sigma_{и} \rightarrow \sigma_{p2}$.

Бутягин И. П. на основании анализа экспериментальных данных показал, что в рамках балочной теории рассмотрение льда как чисто упругого тела приводит к зависимости значений предела прочности $\sigma_{и}$, по физическому смыслу постоянной механической характеристики льда, от расстояния l_2 между точками приложения усилий P (рис. 1, а). Таким образом, определение $\sigma_{и} \rightarrow \sigma_{p2}$ по схеме чистый изгиб возможно только при учете упруго-пластичных свойств льда.

Чистый изгиб отличается тем, что по высоте H , ширине балки b лед однороден по структуре, температуре и солёности. Разрушение льда происходит на нижней поверхности льда, когда максимальные растягивающие напряжения достигнут предела прочности σ_{p2} , а дефор-

мация — предельного значения $\varepsilon_{p_2} = \sigma_{p_2} / E_2$. При такой схеме загрузжения изгибающий момент $M_{\text{и}}$ между силами P будет максимальным и постоянным, а перерезывающая сила Q и, соответственно, касательные напряжения будут нулевыми. Выше нейтральной оси действуют только сжимающие напряжения. Принципиальные отличия деформации льда в зоне растяжения от зоны сжатия будут в том, что в первой зоне они в момент разрушения льда достигнут предельного значения ε_{p_2} , а при сжатии не достигнут величины ε_{p_1} (рис. 1, б, в). По аналогии с моделями для диаграмм напряжения (1) и (2) изменение деформации по толщине льда можно определить параболой:

$$\varepsilon = \omega'' H_i \frac{z}{H_i} \left[1 + \left(\frac{\varepsilon_{p_2}}{\omega'' H_i} - 1 \right) \frac{z}{H_i} \right] \quad (5)$$

и в виде логарифмической зависимости

$$\varepsilon = \frac{\omega'' H_i}{a} \ln \left(a \frac{z}{H_i} + 1 \right). \quad (6)$$

В (6) коэффициент a выполняет «роль» коэффициента C_2 в (2), а ω'' — кривизна упругой линии (нейтрального слоя) при изгибе, максимальная в месте разрушения

льда. При отношениях деформаций $\frac{\omega'' H_i}{\varepsilon_{p_1}} \in (1; 2)$ из (3)

следует, что

$$\frac{\omega'' H_i}{\varepsilon_{p_1}} = 0,323a + 1,13$$

и при линейной зависимости

$$a = 0,2 \left(\frac{E_{\text{ю}}}{E_i} - 1 \right), \quad (7)$$

получим связь отношений деформаций с упругими характеристиками льда:

$$\frac{\omega'' H_i}{\varepsilon_{p_1}} = 1,0655 + 0,0645 E_{\text{ю}} / E_i \quad (8)$$

с пределами изменения отношения от 1 для полностью упругого поведения льда при сжатии до 1,8 при растяжении льда с сильной пластичностью.

Положение нейтрального слоя (рис. 1, б, в) определяется через характерные толщины растянутого H_2 и сжа-

того H_1 слоев льда из условия равенства соответствующих площадей эпюр нормальных напряжений:

$$\int_0^{H_2} \sigma_2(\varepsilon) dz = \int_0^{H_1} \sigma_1(\varepsilon) dz. \quad (9)$$

Для интегрирования произведем замену переменной, исходя из выражения (2):

$$dz = \left(\exp \left(\frac{a_i}{\omega'' H_i} \right) \omega''^{-1} \varepsilon \right) d\varepsilon. \quad (10)$$

Для определения изгибающих моментов в дальнейшем, из (1) с учетом (10), можно получить

$$z dz = \frac{1 - \exp \left(\frac{a_i}{\omega'' H_i} \right) \varepsilon}{2(\varepsilon_{p_1} - \omega'' H_i)} H_i^2 d\varepsilon. \quad (11)$$

Тогда площадь эпюры напряжений в растянутой области будет

$$\int_0^{H_2} \sigma_2(\varepsilon) dz = E_{\text{ю}} \omega''^{-1} \int_0^{\varepsilon_{p_2}} \exp \left(\varepsilon \frac{a_2}{\omega'' H_2} \right) \varepsilon d\varepsilon - (E_{\text{ю}} - E_2) \varepsilon_{p_2}^{-E_2/E_{\text{ю}}} \omega''^{-1} \int_0^{\varepsilon_{p_2}} \exp \left(\varepsilon \frac{a_2}{\omega'' H_2} \right) \varepsilon^{1+E_2/E_{\text{ю}}} d\varepsilon. \quad (12)$$

Интегрирование можно осуществить с использованием разложения экспоненциальной функции в степенной

ряд $e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

При низких температурах льда в зоне сжатия лед деформируется упруго, и изменение напряжений определяется законом Гука: $\sigma_1 = E_{\text{ю}} \omega'' z$, а площадь эпюры

$\int_0^{H_1} \sigma_1(\varepsilon) dz = 0,5 E_{\text{ю}} \omega'' H_1^2$. В результате условие равенства

эпюр (9) сведется к виду:

$$\frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{E_2}{E_{\text{ю}}} \right)^{0,5} \left(\frac{\varepsilon_{p_2}}{\omega'' H_2} \right) \times \sqrt{\frac{1,5}{1 + 0,5 \frac{E_2}{E_{\text{ю}}}} + \frac{0,887a'}{1 + 0,333 \frac{E_2}{E_{\text{ю}}}} + \frac{0,313a'^2}{1 + 0,25 \frac{E_2}{E_{\text{ю}}}} + \frac{0,25a'^3}{1 + 0,2 \frac{E_2}{E_{\text{ю}}}} + \frac{0,097a'^4}{1 + 0,167 \frac{E_2}{E_{\text{ю}}}} + \dots}. \quad (13)$$

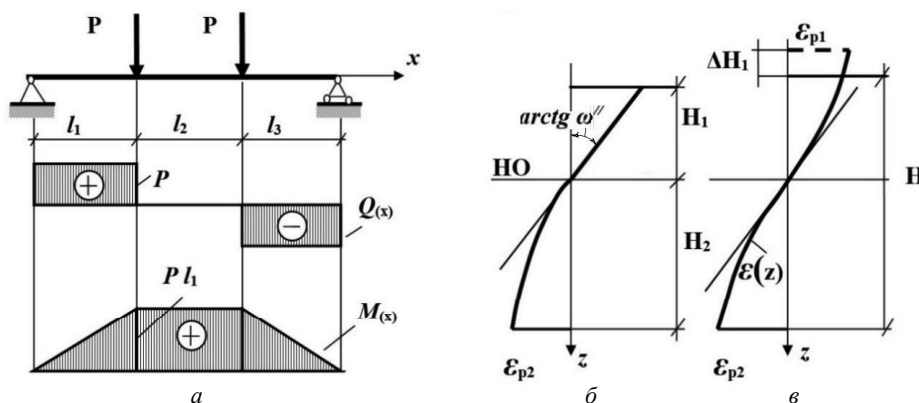


Рис. 1. Призматическая ледовая балка в условиях чистого изгиба (а); относительные деформации льда: упругие в зоне сжатия для низкотемпературного льда (б) и полностью упруго-пластичные (в)

Fig. 1. Prismatic beam under pure bending conditions (a); relative deformations: elastic in the compression zone for low-temperature ice (b) and fully elastic (v)

При изменении отношений упругих характеристик $E_{ю}/E_2$ в диапазоне 4...8 аппроксимирующие зависимости следующие:

$$\begin{aligned} H_2/H_1 &\approx 1,652 \left(1 - 0,0193 E_{ю}/E_2 + 0,0176 (E_{ю}/E_2)^2 \right); \\ H_2/H &\approx 0,479 \left(1 + 0,123 E_{ю}/E_2 - 0,0067 (E_{ю}/E_2)^2 \right); \\ H_1/H &\approx 0,521 \left(1 - 0,114 E_{ю}/E_2 + 0,0061 (E_{ю}/E_2)^2 \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Анализ показывает, что для образцов со стабильными характеристиками зона сжатия всегда тоньше зоны растяжения и составляет $\sim (0,34...0,26) H$.

Перейдем к определению площади эпюры сжимающих напряжений при упруго-пластичном деформировании льда ($E_{ю}/E_1 \neq 1$). Максимальные сжимающие напряжения на поверхности льда не достигают предела прочности σ_1 , а деформация предельной — ε_{p1} . Применим искусственный прием: наростим толщину H_1 на величину ΔH_1 таким образом, чтобы $\varepsilon_1(H_1 + \Delta H_1) = \varepsilon_{p1}$, а $\sigma_1(H_1 + \Delta H_1) = \sigma_{p1}$. Из отношений деформаций (8), учитывая, что кривизна ω'' нейтрального слоя при изгибе льда суть одно и то же, получим

$$(H_1 + \Delta H_1)^{-1} = \frac{\varepsilon_{p2}}{\varepsilon_{p1}} \cdot \frac{1,0655 + 0,645 E_{ю}/E_2}{1,0655 + 0,645 E_{ю}/E_1} \cdot H_2^{-1}. \quad (15)$$

С учетом полученных соотношений (4) аппроксимирующие формулы для определения $(H_1 + \Delta H_1)$ будут: — для зернистого льда при $E_{ю}/E_1 = 2$:

$$(H_1 + \Delta H_1)^{-1} \approx \left(0,662 + 0,0824 \frac{E_{ю}}{E_2} + 0,0027 \left(\frac{E_{ю}}{E_2} \right)^2 \right) H_2^{-1};$$

— для конжеляционного льда при $E_{ю}/E_1 = 3$:

$$(H_1 + \Delta H_1)^{-1} \approx \left(0,719 + 0,091 \frac{E_{ю}}{E_2} + 0,0026 \left(\frac{E_{ю}}{E_2} \right)^2 \right) H_2^{-1}. \quad (16)$$

Верхний предел интегрирования при определении площади $\int_0^{\varepsilon(H_1)} \sigma_1(z) dz$ в соответствии с моделью деформирования (1):

$$\varepsilon(H_1) = \omega''(H_1 + \Delta H_1) \frac{H_1}{H_1 + \Delta H_1} - 0,065 \left(1 + \frac{E_{ю}}{E_1} \right) \varepsilon_{p1} \left(\frac{H_1}{H_1 + \Delta H_1} \right)^2.$$

Для зернистого льда ($E_{ю}/E_1 = 2$):

$$\varepsilon(H_1) \approx (1,081 \pm 0,016) \frac{H_1}{H_1 + \Delta H_1} \varepsilon_{p1}, \quad (17)$$

а вспомогательные величины при интегрировании:

$$a_1' \approx \frac{a_1 \varepsilon_{p1}}{\omega''(H_1 + \Delta H_1)} = 0,1674;$$

$$a_1' \varepsilon(H_1) \approx (0,181 \pm 0,0027) \frac{H_1}{H_1 + \Delta H_1} \varepsilon_{p1}.$$

Для конжеляционного льда ($E_{ю}/E_1 = 3$):

$$\varepsilon(H_1) \approx (1,107 \pm 0,022) \frac{H_1}{H_1 + \Delta H_1} \varepsilon_{p1}; \quad (18)$$

$$a_1' \approx 0,318;$$

$$a_1' \varepsilon(H_1) \approx (0,352 \pm 0,007) \frac{H_1}{H_1 + \Delta H_1} \varepsilon_{p1}.$$

В выражениях (17) и (18) для понижения степени

принято, что $\frac{H_1}{H_1 + \Delta H_1} \approx 0,587 \pm 0,08$ в широком диапа-

зоне значений $\frac{\Delta H_1}{H_1} = 0,5...1$.

Площадь эпюры сжимающих напряжений в соответствии с (1), (10) и (16):

$$\int_0^{H_1} \sigma_1 dz = \frac{E_{ю}}{\omega''} \int_0^{\varepsilon(H_1)} \varepsilon e^{a_1' \varepsilon} d\varepsilon - \frac{E_{ю}}{\omega''} \cdot \frac{1 - E_1/E_{ю}}{\varepsilon_{p1} E_1/E_{ю}} \int_0^{\varepsilon(H_1)} \varepsilon^{1+E_1/E_{ю}} \varepsilon^{a_1' \varepsilon} d\varepsilon.$$

С учетом разложения $\varepsilon^{a_1' \varepsilon}$ в степенной ряд площади эпюр равны:

$$\begin{aligned} \int_0^{H_1} \sigma_1 dz &= \frac{E_{ю} \varepsilon(H_1)^2}{2\omega''} \times \\ &\times \left[\begin{aligned} &1 - 0,421 \left(\frac{H_1}{H_1 + \Delta H_1} \right)^{0,5} + 0,667 a_1' \varepsilon(H_1) \left(1 - 0,4455 \left(\frac{H_1}{H_1 + \Delta H_1} \right)^{0,5} \right) + \\ &+ 0,25 (a_1' \varepsilon(H_1))^2 \left(1 - 0,473 \left(\frac{H_1}{H_1 + \Delta H_1} \right)^{0,5} \right) + 0,067 (a_1' \varepsilon(H_1))^3 \left(1 - 0,921 \left(\frac{H_1}{H_1 + \Delta H_1} \right)^{0,5} \right) + \dots \\ &1 - 0,591 \left(\frac{H_1}{H_1 + \Delta H_1} \right)^{1/3} + 0,667 a_1' \varepsilon(H_1) \left(1 - 0,621 \left(\frac{H_1}{H_1 + \Delta H_1} \right)^{1/3} \right) + \\ &+ 0,25 (a_1' \varepsilon(H_1))^2 \left(1 - 0,636 \left(\frac{H_1}{H_1 + \Delta H_1} \right)^{1/3} \right) + \dots \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь первая формула для зернистого льда, а нижняя — для конжеляционного.

В результате условие (19) для определения отношений толщин с учетом (12) и (19) сводится к виду:

$$\begin{aligned} \frac{E_2}{E_{ю}} \left(\frac{\varepsilon_{p2}}{\varepsilon_{p1}} \right)^2 &\left(\frac{1,5}{1 + 0,5 \frac{E_2}{E_{ю}}} + \frac{0,887 a_2'}{1 + 0,333 \frac{E_2}{E_{ю}}} + \frac{0,313 a_2'^2}{1 + 0,25 \frac{E_2}{E_{ю}}} + \frac{0,08 a_2'^3}{1 + 0,2 \frac{E_2}{E_{ю}}} + \dots \right) = \\ &= \left(\frac{H_1}{H_2} f \right)^2 \times \left[\begin{aligned} &1,686 - 0,492 \left(\frac{H_1}{H_2} f \right)^{0,5} + 0,121 \left(\frac{H_1}{H_2} f \right) - 0,0537 \left(\frac{H_1}{H_2} f \right)^{1,5} + \\ &0,0096 \left(\frac{H_1}{H_2} f \right)^2 - 0,0045 \left(\frac{H_1}{H_2} f \right)^{2,5} + \dots \\ &1,226 - 0,724 \left(\frac{H_1}{H_2} f \right)^{1/3} + 0,288 \left(\frac{H_1}{H_2} f \right) - 0,179 \left(\frac{H_1}{H_2} f \right)^{1/3} + \\ &0,379 \left(\frac{H_1}{H_2} f \right)^2 - 0,024 \left(\frac{H_1}{H_2} f \right)^{2/3} + \dots \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь первая формула для зернистого льда, а нижняя — для конжеляционного;

отношения деформаций $(\varepsilon_{p2}/\varepsilon_{p1})^2$ определяются по (4), а функция f , связанная с отношением упругих характеристик льда $E_{ю}/E_2$, равна:

— для зернистого льда:

$$f(E_{ю}/E_2) = 0,6244 + 0,0824 E_{ю}/E_2 + 0,0027 (E_{ю}/E_2)^2;$$

— для конжеляционного льда:

$$f(E_{ю}/E_2) = 0,719 + 0,091 E_{ю}/E_2 \frac{E_{ю}}{E_2} + 0,0026 (E_{ю}/E_2)^2. \quad (21)$$

Определение толщин в форме $\frac{H_1}{H_2} f$ по (20), с последующей параболической аппроксимацией результатов, приводит к следующим значениям:

— для зернистого льда:

$$\frac{H_2}{H_1} = 0,932 \left(1 + 0,132 E_{ю}/E_2 + 0,043 (E_{ю}/E_2)^2 \right);$$

— для конжеляционного льда:

$$\frac{H_2}{H_1} = 0,971 \left(1 - 0,129 E_{ю}/E_2 + 0,0153 (E_{ю}/E_2)^2 \right). \quad (22)$$

Для зернистого льда $E_{ю}/E_1 = 2$ отношение $\frac{H_1}{H_2} f \approx 0,67 = \text{const}$ и для диапазона отношений

$E_{ю}/E_2 = 4 \dots 8$ толщина сжатого слоя $H_1/H = 0,33 \dots 0,17$, что в 5...6 раз меньше слоя растяжения. Для конжеляционного льда $E_{ю}/E_1 = 3$ при $E_{ю}/E_2 \in (6; 10)$ слой сжатия равен $H_1/H = 0,57 \dots 0,45$, т. е. при небольшой пластичности он в 1,3 раза толще слоя растяжения, а при максимальной пластичности $E_{ю}/E_2 > 8,6$ он тоньше на 20%.

Перейдем к определению изгибающего момента в сечениях балки шириной b с максимальными напряжениями на участке длиной l_2 (см. рис. 1), в условиях чистого изгиба без учета знаков:

$$M_{из} = b \int_0^{H_1} \sigma_1(z) z dz + b \int_0^{H_2} \sigma_2(z) z dz.$$

С учетом замены переменных, согласно (11), момент в зоне растяжения равен:

$$\int_0^{H_2} \sigma_2(z) z dz = 0,5 \frac{E_{ю} H_2^2}{\epsilon_{p2} - \omega'' H_2} \times \left[\int_0^{\epsilon_{p2}} \ddot{a} d\ddot{a} - \int_0^{\epsilon_{p2}} \frac{a_2}{\omega'' H_2} \epsilon d\epsilon - \frac{1 - E_2}{E_{ю} E_2/E_{ю}} \left(\int_0^{\epsilon_{p2}} \epsilon^{1+E_2/E_{ю}} d\epsilon - \int_0^{\epsilon_{p2}} \frac{a_2}{\omega'' H_2} \epsilon^{1+E_2/E_{ю}} d\epsilon \right) \right]. \quad (23)$$

С учетом разложения экспоненциальной функции

в степенной ряд $\epsilon^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ и того, что $\int_0^{\epsilon_{p2}} \epsilon d\epsilon = 0,5 \epsilon_{p2}^2$,

$$\frac{1}{\epsilon_{p2} E_2/E_{ю}} \int_0^{\epsilon_{p2}} \epsilon^{1+E_2/E_{ю}} d\epsilon = \frac{\epsilon_{p2}^2}{2 + E_2/E_{ю}}, \text{ а также ранее определенных}$$

при вычислениях отношения толщин H_2/H_1 , второго и четвертого интегралов в квадратных скобках в (23), получим

$$b \int_0^{H_2} \sigma_2(z) z dz = 0,5 E_2 \epsilon_{p2} \left(\frac{\omega'' H_2}{\epsilon_{p2}} - 1 \right)^{-1} H_2^2 a_2' \times \left(\frac{0,444}{1 + 0,333 E_2/E_{ю}} + \frac{0,156 a_2'^2}{1 + 0,25 E_2/E_{ю}} + \frac{0,04 a_2'^2}{1 + 0,2 E_2/E_{ю}} + \frac{0,008 a_2'^3}{1 + 0,167 E_2/E_{ю}} + \dots \right).$$

Для зоны сжатия момент от напряжений при чисто упругом деформировании низко температурного льда $E_{ю} = E_1$ определяется как:

$$b \int_0^{H_1} \sigma_1 z dz = 0,333 E_{ю} (\omega'' H_1) H_1^2 b. \quad (24)$$

Суммарный момент от напряжений σ_1 и σ_2 равен моменту от внешней разрушающей силы $m_{из} = P \cdot l_1 b^{-1}$ (см. рис. 1):

$$0,333 E_{ю} (\omega'' H_1) H_1^2 + 0,5 E_2 \sigma_{p2} \left(\frac{\omega'' H_2}{\epsilon_{p2}} - 1 \right)^{-1} H_2^2 a_2' \times \left(\frac{0,444}{1 + 0,333 \frac{E_2}{E_{ю}}} + \frac{0,156 a_2'^2}{1 + 0,25 \frac{E_2}{E_{ю}}} + \frac{0,04 a_2'^2}{1 + 0,2 \frac{E_2}{E_{ю}}} + \frac{0,008 a_2'^3}{1 + 0,167 \frac{E_2}{E_{ю}}} \right) = P \cdot l_1 b^{-1}. \quad (25)$$

Здесь вспомогательная величина a_2' при интегрировании аналогична ранее используемой a_1' в (17):

$$a_2' = 0,2 \left(\frac{E_{ю}}{E_2} - 1 \right) \frac{\epsilon_{p2}}{\omega'' H_2}.$$

В результате искомый предел прочности льда при растяжении, определяемый при загрузении балки по схеме «чистый изгиб», при упругом поведении низкотемпературного льда при сжатии определяется по зависимости:

$$\sigma_{p2} = 6 \frac{P \cdot l_1}{b \cdot H^2} \left(1 + \frac{H_1}{H_2} \right)^2 \left[2 \frac{E_{ю}}{E_2} \cdot \frac{\omega'' H_2}{\epsilon_{p2}} \left(\frac{H_1}{H_2} \right)^3 + 3,1 \left(\frac{E_{ю}}{E_2} - 1 \right) \left(\frac{E_{ю}}{E_2} + 1 \right) \left(\frac{\epsilon_{p2}}{\omega'' H_2} \right) \times \left(\frac{1}{1 + 0,333 E_2/E_{ю}} + \frac{0,352 a_2'}{1 + 0,25 E_2/E_{ю}} + \frac{0,09 a_2'^2}{1 + 0,2 E_2/E_{ю}} + \frac{0,018 a_2'^3}{1 + 0,167 E_2/E_{ю}} \right) \right], \quad (26)$$

где отношение деформаций $\frac{\omega'' H_2}{\epsilon_{p2}}$ и обратная величина определены из выражения (8).

Результат расчетов предела σ_{p2} по формуле (26) в диапазоне отношения модулей $E_{ю}/E_2 \in (4; 10)$ и последующей аппроксимации приводит к зависимости

$$\sigma_{p2} = 6 \frac{P \cdot l_1}{b \cdot H^2} 1,104 \left(1 - 0,127 \frac{E_{ю}}{E_2} + 0,00713 \left(\frac{E_{ю}}{E_2} \right)^2 \right). \quad (27)$$

При $E_{ю}/E_2 \in (4; 10)$ предел прочности уменьшается в 1,5...2 раза по сравнению с $\sigma_{из}$ для полностью упругого льда, что связано с резким увеличением толщины H_2 в ~1,7 раза. Следует ожидать, что такое же уменьшение будет и при упруго-пластичном деформировании сжимаемого льда, когда $E_{ю}/E_1 > 1$. В (27) выделен множитель

$$6 \frac{P \cdot l_1}{b \cdot H^2} = \sigma_{из}, \text{ определяющий максимальные растягивающие напряжения по теории изгиба упругих балок [8].}$$

По аналогии могут быть определены моменты при упруго-пластичной деформации льда в зоне сжатия. Для этого необходимо определить суммарный момент

$$b \int_0^{H_1} \sigma_1(z) z dz \text{ по формуле (23) с соответствующими заме-}$$

нами величин на $E_1, \epsilon_{p1}, \omega''(H_1 + \Delta H_1), H_1, \dots$. Производится соответствующая замена значения момента в (25). В результате определяется зависимость искомого предела прочности льда σ_{p2} , для упрощения которой могут использоваться формулы связи (16), (17) и (18).

Морской лед.

Аппроксимация эпюр напряжений

Для морского льда характерно значительное изменение солёности, температуры и, как следствие, его рассматривают в качестве трансверсально-изотропной пластины на упругом основании [1]. Известны работы с аппроксимацией упругих характеристик для получения эпюр напряжений [9, 10].

В дальнейшем будем рассматривать изгиб льда при действии нагрузки сверху вниз с зоной растяжения на верхней (выше нейтрального слоя) половине льда. Знаки напряжений и положения слоя z будем опускать.

В наиболее напряженном сечении льда в зоне растяжения напряжения растут от $E_{ю}(0)\omega''z$ вблизи нейтрального слоя, до предела прочности верхней поверхности льда зернистой структуры σ_{p2} . Такому изменению соответствует параболическая зависимость:

$$\sigma_2 = E_{ю}(0)\omega''z + (\sigma_{p2} - E_{ю}(0)\omega''H_2)\left(\frac{z}{H_2}\right)^2, \quad (28)$$

где значение модуля Юнга соответствует льду на нейтральном слое; ω'' — максимальная кривизна нейтрального слоя; H_2 — толщина слоя растяжения.

Напряжения сжатия так же начинаются со значения $E_{ю}(0)\omega''z$ (без учета знака), монотонно возрастают до максимума и, далее, начинают резко уменьшаться к нижней поверхности льда, который имеет значительную солёность $S(H_1)$ и температуру $T(H_1)$, близкую к температуре плавления. Для конкретизации эпюры напряжений сжатия применим следующий прием: нарастим зону сжатия льда на конечную величину ΔH_1 , такую, чтобы при сохранении солёности льда на нижней поверхности $S(H_1) = S(H_1 + \Delta H_1)$, постоянном градиенте температуры $(dT(z)/dz)|_{H_1} = \text{const}$, наращенный лед достигал предельного содержания рассола $v_{p\text{max}}$, при котором предел прочности $\sigma_{p1}(H_1 + \Delta H_1) \rightarrow 0$ (рис. 2). В этом случае эпюре сжимающих напряжений будет соответствовать парабола

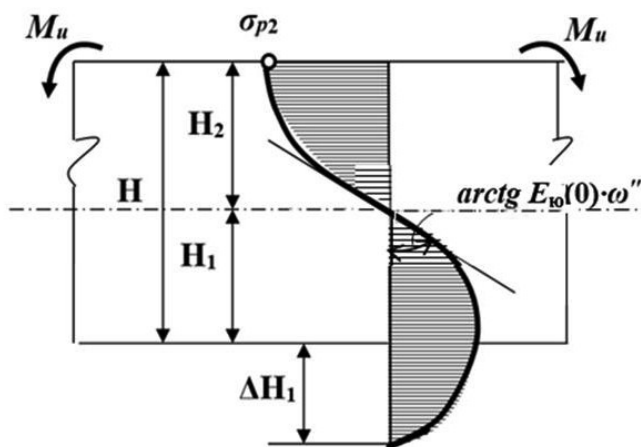


Рис. 2. Схематические эпюры напряжений во льду с «наращиванием» нижней поверхности льда

Fig. 2. Schematic diagrams of stress into ice with build-up of the lower ice surface

$$\sigma_1 = E_{ю}(0)\omega''z(1 - z/(H_1 + \Delta H_1)). \quad (29)$$

Тогда условие равенства площадей эпюр (8) примет вид

$$\left(\frac{E_{ю}(0)\omega''H_2}{6} + \frac{\sigma_{p2}}{3}\right)H_2 = \frac{E_{ю}(0)\omega''}{2}\left[1 + 2\left(1 + \frac{H_1}{\Delta H_1}\right)^{-1}\right]H_1^2$$

Последнее позволяет получить соотношения для толщин растяжения и сжатия

$$\frac{H_2}{H_1} = \left(\frac{1 + 2\left(1 + H_1/\Delta H_1\right)^{-1}}{1 + \frac{2\sigma_{p2}}{E_{ю}(0)\omega''H_2}}\right)^{0,5} \quad (30)$$

и предела прочности верхнего зернистого слоя льда

$$\sigma_{p2}(H_2) = E_{ю}(0)\omega''H_2\left[0,5 + \left(1 + H_1/\Delta H_1\right)^{-1}\right](H_1/H_2)^2 - 0,5]. \quad (31)$$

В (31) напряжения $(E_{ю}(0)\omega''H_2)$ соответствуют полнотой упругому поведению льда. Отношение напряжений

$\frac{\sigma_{p2}}{E_{ю}(0)\omega''H_2}$ изменяется в пределах 0,9...0,53 при

колебаниях температуры верхней поверхности $T(H_2)$ от 20 °С до ~ 0 °С.

Для практического определения отношения толщин H_2/H_1 , в соответствии с (30), необходимо определить нарастаемую толщину ΔH_1 . С использованием формулы Франкенштейна — Гарднера [7], температура, при которой лед теряет прочность, будет

$$T(H_1 + \Delta H_1) \approx -\frac{45S(H_1)}{v_{p\text{max}}},$$

а нарастаемая толщина

$$\Delta H_1 = \left[-\frac{45S(H_1)}{v_{p\text{max}}} - T(H_1)\right] / \left.\frac{dT(z)}{dz}\right|_{H_1}. \quad (32)$$

Солёность нижней поверхности льда в период его роста определяется по формуле В. Л. Цурикова [1], которая приводится к виду

$$\frac{S(H_1)}{S} = \frac{1}{1 + 2,28(dH/dt)^{-0,5}},$$

где S — солёность поверхностного слоя воды (для СМП характерно $S=3,03,2\%$), а скорость роста dH/dt изменяется в значительных пределах: от $>1,3$ см/сут до 0,5...0,6 см/сут. Неоднозначен вопрос с солёностью $S(H_1)$ в мае — сентябре. В то же время из статистических результатов для солёности $S(z)$ [11] можно получить устойчивые соотношения $S(H_1)/\bar{S}=1,28; 1,25$ и 1,23 для зимнего роста льда, таяния снега в период май — июль и таяния бесснежного льда, соответственно. Среднюю солёность $\bar{S}$ можно «связать» с толщиной льда, например, по формуле А. Я. Рывлина [12]:

$$\frac{\bar{S}}{S} = 0,87 \cdot \exp(-0,5H^{0,5}) + 0,13.$$

Температура нижней поверхности льда летом равна [4] $T(H_1)=-1,05$ °С, а зимой близка к температуре замерзания $T(H_1)=-1,71...-1,81$ °С (в устьях рек повышается до $T(H_1)=-0,5$ °С).

В значительной мере наращиваемый слой будет определяться градиентом температуры $(dT(z)/dz)|_{H_1}$. Для летнего двухметрового льда [4] $(dT(z)/dz)|_{H_1} = (4,11 - \bar{T})/H$. Если принять максимальное содержание рассола $v_p \approx 0,3\%$, то в соответствии с (22), для летнего периода

$$\Delta H_1 \approx \frac{1,05 - 0,185\bar{T}}{4,11 - \bar{T}} H$$

и будет изменяться в пределах $(0,06...0,11)H$. Более неопределенной является значение ΔH_1 для зимнего льда, когда из-за значительного роста градиента температуры

$$\Delta H_1 \in (0,04...0,12)H \text{ и } \Delta H_1 \approx \frac{(0,88 \pm 0,025) - 0,096\bar{T}}{-\bar{T} - (1,76 \pm 0,05)} H.$$

Оценочные расчеты отношения толщин H_2/H_1 следующие: ~ 1 для летнего льда и $0,7$ для зимнего; при $\bar{T} \rightarrow -0,5^\circ\text{C}$ отношение увеличивается до максимального значения $\sim 1,2$. Это соответствует толщине сжатого слоя $H_1/H = (1 - H_2/H_1)^{-1}$: $0,5$; $0,6$ и $0,45$, соответственно.

Из анализа расчетов следует, что:

— при изгибе реального льда сжатый слой на $\sim 25\%$ больше по толщине слоя растяжения;

— несмотря на значительные градиенты солёности и температуры положение нейтрального слоя довольно стабильное.

Полученные результаты позволяют приближенно, в рамках параболической аппроксимации эпюр, оценить погонный изгибающий момент $m_{\text{и}}$ при одноосном напряженном состоянии из условия $m_{\text{и}} = \int_0^H (\sigma_z z) dz$.

$$m_{\text{и}} = \int_0^H (\sigma_z z) dz.$$

С использованием (28), (29), (30) и подстановки (11) для момента получим:

$$m_{\text{и}} = \frac{E_{\text{ю}}(0)\omega'' H^3}{4} \left[\left(1 + \frac{H_1}{\Delta H_1} \right)^{-1} \left(\frac{H_1}{H} \right)^2 + 0,5 \left(\frac{H_1}{H} \right) - \frac{1}{6} \right]. \quad (33)$$

Формулу (33) можно привести к «стандартному» для упругого решения виду

$$m_{\text{и}} = \frac{E' \omega''}{6} H^3, \quad (34)$$

где модуль Юнга заменяется на приведенное значение, учитывающее изменение $E_{\text{ю}}(z)$ по толщине реального льда:

$$E' = \frac{2}{3} E_{\text{ю}}(0) \left[\left(1 + \frac{H_1}{\Delta H_1} \right)^{-1} \left(\frac{H_1}{H} \right)^2 + 0,5 \left(\frac{H_1}{H} \right) - \frac{1}{6} \right]. \quad (35)$$

Определение значения модуля Юнга на уровне нейтрального слоя $E_{\text{ю}}(0)$ возможно методом аффинного пересчета с подходящей диаграммы напряжения при сжатии образцов идентичного льда [6], после определения соответствующей температуры и солёности [4, 5]. В инженерных расчетах по формулам (28) и (29) возникает вопрос об эффективной толщине летнего льда, когда при $\bar{T} > -1...0^\circ\text{C}$ он покрыт растаявшей ледовой массой. Несмотря на опреснение верхнего слоя зернистого льда объемное содержание рассола $v_p \approx 0,1...0,2\%$, уже при

$T(H_2) = 0^\circ\text{C}$. Поэтому необходимо исключать какую-то толщину льда ΔH_2 , как не обладающего механической прочностью [13]. Ориентировочно ΔH_2 соответствует слою льда с температурой $T(H_2 - \Delta H_2) > 0,5^\circ\text{C}$. Одновременно с переходом к эффективной расчетной толщине $(H - \Delta H_2)$, вес растаявшего льда можно учесть повышая расчетную плотность льда до значения $\rho' = \rho H / (H - \Delta H_2)$.

В настоящее время имеется массив данных по испытаниям в полевых условиях изгиба и разрушения реального морского и речного льда. Для этого во льду на всю его толщину выпиливается консоль (клавиша) размерами $l \times b \times H$ с одним свободным концом и вторым, жестко связанным с ледовым полем. Свободный конец загружается вертикальной нагрузкой P_z , которая наряду с прогибом ω_0 фиксируется в момент разрушения льда. Эти значения пересчитываются на характеристики льда [14]:

— предел прочности льда на изгиб

$$\sigma_{\text{и}} = 6 \frac{P_z l}{b \cdot H^2};$$

— модуль деформации льда

$$E = 4 \frac{P_z l^3}{b \cdot H^3 \omega_0}. \quad (36)$$

Простейший анализ показывает [8], что (36) представляют собой зависимости для прогиба консольной призматической балки без упругого основания. Таким образом, в (36): реакция упругого основания не учитывается; лед считается полностью упругим с $E_{\text{ю}} = E_1 = E_2$ и $H_2/H_1 = 1$; все характеристики льда относят к средним: $\bar{T}, \bar{S}, \bar{v}_p$.

Рационально использовать накопленные экспериментальные данные для пересчета на реальный лед. Достаточно хорошим приближением для упругой линии является затухающая функция:

$$\omega(x) = \omega_0 \left(1 - \sin 0,5\pi \frac{x}{l} \right),$$

отвечающая условиям $\omega(l) = \omega'(l) = 0$ в месте закрепления и имеющая там же максимальную кривизну $\omega''(l) = \omega_0 (0,5\pi)^2 l^{-2}$. В этом случае изгибающий максимальный момент в заделке (заделке) равен:

$$M_{\text{и}} = P_z l - b \rho g \omega_0 \int_0^l (l-x) \left(1 - \sin 0,5\pi \frac{x}{l} \right) dx \quad (37)$$

и после интегрирования определяется как погонный разрушающий лед момент:

$$m_{\text{и}} = p_z l \cdot b^{-1} - 0,269 \rho g \omega_0 l^2. \quad (38)$$

Замена момента $p_z l b^{-1}$ в (36) на исправленное значение (38) позволяет определить откорректированное значение предела прочности льда при изгибе:

$$\sigma'_{\text{и}} = \sigma_{\text{и}} - 1,61 \rho g \omega_0 \bar{l}^2, \quad (39)$$

где $\bar{l} = l/H$ — относительная длина консоли льда; данные по условной механической характеристике льда $\sigma_{\text{и}}$ обобщены авторами [2]. При изменениях кромочного

прогиба для зимнего льда (меньшие значения) и летнего в пределах $\omega_0 \approx (1,7 \div 4,5) 10^{-4} l^2 H$ и $l = 6 \dots 8$ неучет влияния реакции упругого основания может привести к завышению $\sigma_{\text{и}}$ зимнего льда толщиной 1,5 м на 1...3% и на 6...18% для летнего льда разрушенностью 1 ÷ 2 балла. Используя приближенное соотношение $\omega''(l) = 2,47 \omega_0 l^{-2}$, можно заключить, что кривизна упругой линии в защемлении зимой и летом оценивается как:

$$\omega''(l) = (0,42 \dots 1,1) 10^{-3} H^{-1}. \quad (40)$$

Поэтапное разрушение поля льда при изгибе с образованием системы трещин. Переход к одноосному напряженному состоянию

Разрушение ледовой пластины на упругом основании при изгибе от действия вертикальных нагрузок и кромочных моментов происходит не одномоментно, а поэтапно с последовательным образованием системы сквозных трещин. Картина трещинообразования показана на рис. 3 [10], полученной при нагружении штампом диаметра 23 см поля пресного льда с $H=3$ см. Первоначально последовательно образовывались радиальные трещины 1...4, разделившие пластину на клиновидные сектора с центральным углом $\sim 45^\circ$. Затем, начиная с периферии и приближаясь к центру, образовывались кольцевые (тангенциальные) трещины 5...7. До момента образования первой кольцевой трещины 5 проломные усилие P_z возрастало.

Аналогичная картина образования трещин происходит при контакте конических опор нефтяных платформ с дрейфующими льдами и движении ледоколов в сплошных льдах. На фотографии рис. 4 показаны трещины при движении а/л «Арктика» в сплошных льдах.

Исходное уравнение изгиба ледяной пластины на упругом основании

$$\nabla^2 \nabla^2 \omega + \alpha^4 \omega = \frac{P_z(r, \varphi)}{D}, \quad (41)$$

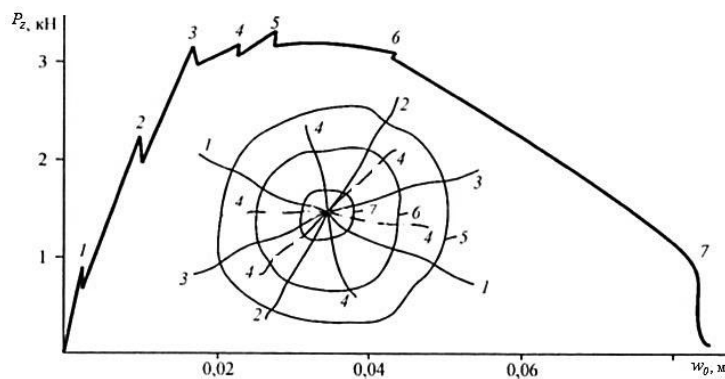


Рис. 3. Картина разрушения ледяной пластины на упругом основании и диаграмма нагрузок при центральном изгибе [10] (1–6 — порядок образования трещин)

Fig. 3. Destruction of an ice plate on elastic base and a diagram of loads during central bending [10] (1–6 the order of crack formation)

где $\nabla^2 \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2}$ — дифференциальный оператор Лапласа в полярной системе координат (r, φ) ;

P_z — вертикальная нагрузка; $D = \frac{E' H^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластины; а $\alpha^4 = \rho g \cdot D^{-1}$ — параметр упругого основания.

Условие совместимости деформаций (сплошности) в двух взаимно перпендикулярных направлениях приводит к выполнению уравнения Софи-Жермен $\nabla^2 \nabla^2 \omega = 0$, а, вследствие этого, к сведению уравнения (41) к виду:

$$\omega_0 \omega_r(r) \omega_\varphi(\varphi) = \frac{P_z}{\rho g}, \quad (42)$$

где для функции прогиба $\omega = (r, \varphi)$ произведено разделение переменных. Анализ (42) показывает, что изгиб льда возможен:

- от равномерной нагрузки по полю льда, например, толстого слоя снега, в следствие чего происходит притапливание льда на величину $\omega_0 = P_z / (\rho g)$;

- от гипотетической непрерывной нагрузки $P_z = P_z(0) \omega_r(r)$, по форме совпадающей с картиной прогибов $\omega = \omega_0 \omega_r(r)$, когда в центре нагрузки прогиб $\omega_0 = P_z(0) / (\rho g)$.

При местных нагрузках условие (42) сводится к нулевому равенству $\omega_0 \omega_r(r) \omega_\varphi(\varphi) = 0$ и к исключению возможности деформирования льда (нарастанию прогибов) в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Должно произойти нарушение сплошности с последующим переходом к одноосному напряженному состоянию.

Начальное разрушение льда — появление первых

трещин зависит от соотношения кривизны $\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial r^2} \sqrt{\frac{\partial^2 \omega_\varphi}{\partial \varphi^2}}$.

Экспериментальные исследования [10, 15], моделирование изгиба пластин [16], конечно-разностные расчеты [10] свидетельствуют о том, что при начальной деформации льда $\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial r^2} \gg \frac{\partial^2 \omega_\varphi}{\partial \varphi^2}$ и, как следствие, появлению пер-



Рис. 4. Образование трещин в зоне контакта борта ледокола со льдом (1 — опережающая; 2, 3 — нормальные к борту текущие и предыдущие)

Fig. 4. Formation of cracks in the icebreaker's contract area with ice (1— advanced; 2, 3 — current and previons normals to board)

выми радиальных трещин (рис. 3, 4). Хейсиным Д. Е. было отмечено [1], что решение уравнения (41) допускает и несимметричные решения, обладающие несколькими осями симметрии.

$$\frac{\partial \omega_\tau}{\partial \tau} = \frac{\partial^3 \omega_\tau}{\partial \tau^3} = 0. \quad (44)$$

Условия симметрии (44) одновременно являются и условиями экстремума изгибающих моментов в тангенциальном направлении. И именно, по осям симметрии развиваются радиальные трещины. Наиболее наглядно это видно в отношении первой, распространяющейся от форштевня вперед по курсу, опережающей трещины (рис. 4).

При разделении переменных исходное уравнение (41) разделяется на два отдельных уравнения с переменными только φ или r . Уравнение с постоянными коэффициентами $2b$ и d^2 для определения $\omega_\tau(\varphi)$:

$$\frac{\partial^4 \omega_\tau}{\partial \varphi^4} + 2b \frac{\partial^2 \omega_\tau}{\partial \varphi^2} + d^2 \omega_\tau = 0. \quad (45)$$

Решением этого уравнения, удовлетворяющим (44), и исключением выпучивания льда $\omega_\tau \geq 0$ является периодическая функция:

$$\omega_\tau = (1 - \cos n\varphi) \quad (46)$$

с периодом $2\pi n^{-1}$, где $n = 0,707 d \cdot b^{-1}$ — число гребней изогнутого льда, выполняющее роль частоты. Вдоль гребня

функция $\omega = 0,5(n\varphi)^2 \omega_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{0,707n}$ и на гребне кривизна

в тангенциальном направлении $\frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} = -\omega_0 n^2 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{0,707n}$.

Наряду с гребнями через половину периода образуется впадина во льду. Если бы прогиб полностью определялся изменением только в радиальном направлении, то уравнение (41) упростилось до вида

$$\frac{d^4 \omega}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \omega}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\omega}{dr} + \alpha^4 \omega = \frac{g(r)}{D}. \quad (47)$$

Решение для случая центрального нагружения пластины силой P_z и затуханием прогибов на бесконечности известно [17]:

$$\omega(r) = 0,125 \alpha^{-2} P_z \cdot \text{kei}(\alpha r), \quad (48)$$

где функция Кельвина:

— при малых значениях аргумента табулирована в виде

$$\text{kei}(\alpha r) = (0,5 \alpha r)^2 (1,1159 - \ln(\alpha r)) - 0,25\pi + \dots;$$

— при больших значениях αr определяется выражением

$$\text{kei}(\alpha r) = -1,253(\alpha r)^{-1} \exp(-0,707 \alpha r) \sin 0,707(\alpha r + 0,555). \quad (49)$$

При двухосном напряженном состоянии вдоль впадины уравнение для определения $\omega_r(r)$ определится как

$$\omega_r^{IV} + 2 \frac{\omega_r''}{r} - \frac{1+n^2}{r^2} \omega_r'' + \frac{1-n^2}{r^3} \omega_r' + \left(0,5 \frac{n^4}{r^4} + \alpha^4\right) \omega_r = 0..$$

Решение этого нелинейного уравнения отдельная сложная задача. Укажем отдельные решения, основанные на оценке и исключении малозначимых членов:

— при малом значении аргумента (радиуса r)

$$\alpha^4 \ll 0,5 \frac{n^4}{r^4}$$

$$\omega_r \approx \omega_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{0,065n^2 - 0,375n + 2,61};$$

— при $r \rightarrow \infty$ происходит затухание прогибов

$$\omega_r \sim r^{-4/3}.$$

Прогиб по впадине $\omega = \omega_0 \omega_r$, а кривизна $\frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} = \omega_0 n^2 \omega_r$

сменит знак, по сравнению с гребнем. По гребню зона растяжения находится выше нейтрального слоя, а по впадине — ниже. Вследствие этого в первую очередь трещины образуются по впадинам и только в летне-осенний период, при повышении температуры верхней поверхности льда, по гребню.

Частота n связана с жесткостью льда и $\sim \alpha$. Характерными частотами являются значения: $n=4, 5$ и 6 — для тонкого льда и $n=3, 4, 5$ — для жесткого толстого льда. Соответствующие периоды составляют $T = \varphi = \pi/2; 2\pi/5; \pi/3$ и $2\pi/3; \pi/2; 2\pi/5$. Экспериментально установлено, что при образовании центрального сектора с $\varphi = \pi/2$ для тонкого льда [10] (рис. 3) и $\varphi = 2\pi/3$ для толстого [15] образуется дополнительная радиальная трещина. Таким образом, число трещин для тонкого льда в центральной пластине будет 5, 6 и 8 (соответствующие центральные углы образованных клиновидных секторов льда $\varphi = 72^\circ, 60^\circ$ и 45°), а в толстых льдах 4, 5 и 6 ($\varphi = 90^\circ, 72^\circ$ и 60°).

В результате деления поля льда на клиновидные сектора происходит их дальнейший изгиб в радиальном направлении — переход к полностью одноосному напряженному состоянию. Изгиб соседних клиньев происходит синхронно без усилий по берегам нормальной трещины — это установлено специальными опытами по изгибу секторов с пропилом, проведенными в ледовом бассейне Арктического и Антарктического НИИ в 50-е годы [15]. Численно это подтверждено сопоставлением результатов расчетов С. А. Вершинина изгиба образовавшихся клиньев с нулевыми тангенциальными изгибающими моментами с экспериментальными данными Д. Ф. Панфилова [18, 19].

Перейдем к изучению второго этапа изгиба поля льда на упругом основании — изгибу клиновидных секторов.

Деформация и разрушение клиновидного сектора льда при изгибе под действием кромочной вертикальной нагрузки.

При взаимодействии гидротехнических сооружений с коническими опорами и бортов судов со сплошным

льдом на кромку льда действует нормальное давление равное пределу прочности льда на смятие $\sigma_{см} \approx 1,2\sigma_{p2}$ (здесь σ_{p2} — предел прочности водно-снежного льда на сжатие [3]). Наклон этой площади контакта от вертикали составляет угол

$$\beta_1 = \arctg(\tg\beta/\cos\gamma),$$

где β — угол наклона шпангоута к вертикали (развала шпангоута), а γ — угол между касательной к ватерлинии и диаметральной плоскостью в месте контакта со льдом, если употреблять кораблестроительную терминологию. Геометрия площадки смятия ABE приведена на рис. 5. Смятие острой кромки сектора и увеличение площадки контакта происходит непрерывно вплоть до окончательного разрушения льда. В соответствии с принципом Сен-Венана, заменим действие нормального давления $\sigma_{см}$ на площадку на действие погонной силы p_z по линии $A'B'$ или равную по длине дугу окружности радиусом

$$r_0 = \frac{A'B'}{\varphi} = 9p_z\sigma_{см}^{-1}\varphi^{-1}\tg\frac{\varphi}{2}. \quad (50)$$

Действие внецентренной горизонтальной кромочной силы сведем к кромочному изгибающему моменту m_0 , с достаточной точностью определенному

$$m_0 \approx -0,5(p_z\ctg\beta_1)H, \quad (51)$$

противоположному по знаку моменту от вертикальной составляющей p_z .

По виду клиновидных секторов они делятся на острый выступ с поля льда с радиусом R и бесконечный клин, уходящий вглубь льда, образованный нормальными трещинами. Угол раствора секторов (центральный угол) φ определяется в радианах. В принципе, при действии только вертикальной погонной нагрузки p_z по дуге длиной $(r_0\varphi)$ уравнение изогнутого нейтрально-го слоя получается из (48):

$$\omega(r) = 0,5\pi\alpha^{-2}r_0p_z\text{kei}(\alpha r),$$

где задание функции Кельвина (49) является кусочным (дискретным). Поэтому в качестве исходного уравнения будем использовать условие Навье в полярных координатах

$$\frac{E'H^3}{12}(\varphi r)\left(\frac{d^2\omega}{dr^2} + r^{-1}\frac{d\omega}{dr}\right) = -\varphi\left(\sum M_i(r)\right)^2, \quad (52)$$

где в знаке момента учтено направление прогибов вниз. В (52) E' — приведенный модуль (35), учитывающий пластичность льда. Изгибающие моменты будут складываться из моментов от кромочной силы p_zr_0 и от сил реакции упругого основания

$$-\sum M_i(r) = -(p_zr_0)(r-r_0) + (p_zr_0)(R-r_0)f_1(r), \quad (53)$$

где $f_1(r) = m_1 \frac{(r-r_0)^2}{(R-r_0)^2}$ аппроксимирует поведение момента, вызванного реакцией упругого основания. Пределы изменения $f_1(r) = 0 \dots m_1$, в которых число $m_1 < 1$, кроме случая достаточно протяженного клина с $R \rightarrow \infty$, когда $m_1 \rightarrow 1$ и $f_1(R) \rightarrow 1$.

Функцию прогиба ищем в виде степенного ряда $\omega(r) = a_1r^3 + a_2r^2 + a_3r + \omega_0$, где прогиб на кромке определяется из условия в заделке $\omega(R) = 0$, как $\omega_0 = -a_1R^3 - a_2R^2 - a_3R$. Подставляя функцию $\omega(r)$ в условие Навье, с учетом значения ω_0 , и приравнявая члены с одинаковыми степенями r , получим:

$$\omega(r) = -\frac{\alpha^4 p_z r_0^3}{9\rho g} \frac{R/r_0 - r/r_0}{R/r_0 - 1} \times \left[m_1 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 + \left((m_1 - 0,278) \frac{R}{r_0} - 0,278(m_1 - 0,5) \right) \frac{r}{r_0} + 0,111 \frac{R}{r_0} + 0,278(m_1 - 1) \right]. \quad (54)$$

Коэффициент m_1 определится из второго условия

в заделке (защемлении) клина $\left. \frac{d\omega}{dr} \right|_R = 0$:

$$m_1 = 1,5 \frac{(R/r_0 - 1)(R/r_0 - 2)}{(R/r_0)^2 - 1,5R/r_0 + 3}. \quad (55)$$

Анализ показывает, что $m_1 = 0$ при относительной длине ледового выступа $R/r_0 < 2$ и $m_1 = 1$ при длине клина $R/r_0 > 6$. Физически это означает, что для коротких вы-

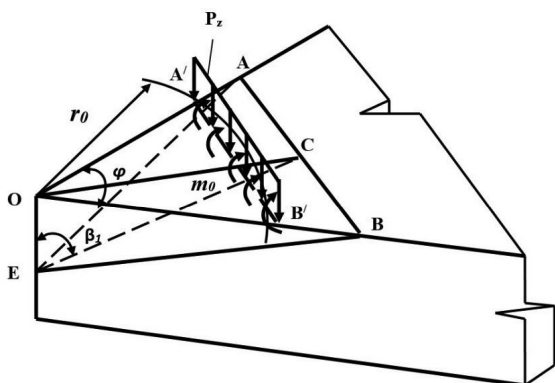


Рис. 5. Геометрия смятия кромки льда

Fig. 5. Geometry of crumpling the ice edge

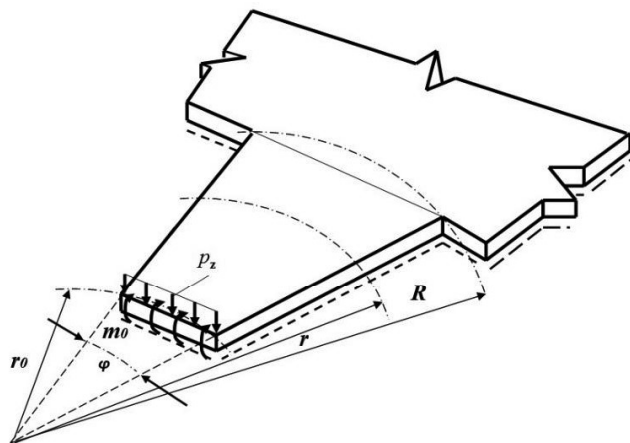


Рис. 6. Схема нагружения клиновидного сектора льда на упругом основании при изгибе

Fig. 6. Loading a wedge-shaped ice sector on an elastic base during bending

ступов влияние упругого основания мало и погонный изгибающий момент в заделке $m_{\text{и}} = -p_z(R-r_0)$. Для более длинных выступов и клиньев радиус разрушения r_m , определяющий положение первой кольцевой трещины (№ 5 на рис. 3), найдется из условия экстремума изгиба-

ющего момента в условии Навье (52) $\frac{d \sum M_i(r)}{dr} = 0$,

и с учетом значения m_1 по (55) сведется к зависимости:

$$\frac{r_m}{R} = 0,333 \left(\frac{R}{r_0} - 2 \right)^{-1} \left(\frac{R}{r_0} - 3 \left(\frac{R}{r_0} \right)^{-1} + 1,5 \right). \quad (56)$$

В диапазоне $R/r_0 \in (1; 6)$ радиус r_m/R монотонно понижается со значения 1 до 0,583, а для больших длин клиновидных сегментов с $R/r_0 > 6$ определяется как

$$r_m = 0,5(R+r_0). \quad (57)$$

Для протяженных клиновидных секторов расстояние до заделки определяется длиной R нормальных трещин (№ 1...4 на рис. 3). Она может быть оценена из условия равенства суммарной силы реакции упругого основания вертикальной нагрузки на лед

$$\varphi \cdot \rho g \int_0^R \omega(r) \cdot r dr = (p_z r_0) \varphi.$$

С учетом решения (5) для прогибов $\omega(r)$ оно сводится к равенству:

$$\left(\frac{R}{r_0} \right)^4 - 6,875 \left(\frac{R}{r_0} \right)^3 + 9,238 \left(\frac{R}{r_0} \right)^2 - 12,19 \left(\frac{R}{r_0} \right) = 34,3(\alpha r_0)^{-4},$$

где $\alpha^4 = 12\rho g(E'H^3)^{-1}$ — параметр упругого основания.

Результаты аппроксимации решения равенства:

— при $\alpha r_0 = 0,03...0,13$

$$\frac{R}{r_0} = 9 \cdot 10^3 \left((\alpha r_0)^2 - 0,232(\alpha r_0) + 0,0154 \right);$$

$$\frac{r_0}{R} = (0,385 \pm 0,005) \alpha r_0;$$

— при $\alpha r_0 = 0,13...0,55$

$$\frac{R}{r_0} = 1,286 \cdot 10^3 \left((\alpha r_0)^2 - 0,306(\alpha r_0) + 0,0313 \right); \quad (58)$$

— при $\alpha r_0 = 0,1...0,4$

$$\frac{r_0}{R} = 0,01 + 0,295 \alpha r_0.$$

Изгибающий момент в сечении r_m , определяющем положение первой кольцевой трещины, с учетом (57) и (58) равен

$$-\sum m_i(r_m) = -0,25 p_z (R-r_0). \quad (59)$$

Клин под действием отрицательного момента на кромке. Изгиб льда при совместном действии вертикальной силы p_z и момента m_0

При наклонных бортах ледоколов и конических опорах морских платформ контактные усилия со льдом сво-

дятся к вертикальным p_z и кромочному изгибающему моменту m_0 (рис. 6). Условие Навье (52) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{E'H^3}{12}(\varphi r) \left(\frac{d^2 \omega}{dr^2} + r^{-1} \frac{d\omega}{dr} \right) = \\ = \varphi \left(m_0 r_0 - m_0 r_0 m_2 \frac{(r-r_0)^2}{(R-r_0)^2} \right), \end{aligned} \quad (60)$$

где $f_2(r) = m_2(r-r_0)^2(R-r_0)^{-2}$ аппроксимирует поведение момента от реакции упругого основания и изменяется в пределах 0...1. Искомая функция прогиба определяется рядом $\omega(r) = b_1 r^3 + b_2 r^2 + b_3 r + \omega_0$, где кромочный прогиб определяется из условия в заделке (закреплении) клина $\omega(R) = 0$.

Подстановкой $\omega(r)$ в уравнение (60), получим функцию прогиба

$$\begin{aligned} \omega(r) = \frac{\alpha^4 m_0 R/r_0 - r/r_0}{\rho g (R/r_0 - 1)^2} \times \\ \times \left(m_2 r^2 + m_2 (R-4,5r_0)r + (m_2+9)R^2 - \right. \\ \left. - 4,5(m_2+4)Rr_0 - 9(m_2-1)r_0^2 \right). \end{aligned} \quad (61)$$

Коэффициент m_2 определяется из условия $\left. \frac{d\omega}{dr} \right|_R = 0$

в заделке:

$$m_2 = \left(1 - \frac{r_0}{R} \right)^2 \left(\frac{r_0}{R} + 1,264 \right)^{-1} \left(\frac{r_0}{R} - 0,264 \right)^{-1}. \quad (62)$$

и будет монотонно изменяться от 0 до 1 при $R/r_0 \rightarrow 2,25 \approx 2$. Прогиб для коротких клиньев (ледовых выступов) с $R/r_0 < 2$ определяется подстановкой (62) в (61), а момент $m_{\text{и}}$ в заделке — подстановкой (62) в правую часть (59). Для более протяженных клиньев прогиб определяется по (61) подстановкой значения $m_2 = 1$, а момент в заделке $m_{\text{и}} \equiv 0$.

Перейдем к рассмотрению изгиба клина при совместном действии на кромку p_z и m_0 (рис. 6). Прогиб определится суммированием прогибов по (54) и (61) с соответствующими значениями m_1 по (55) и m_2 по (62). Первая кольцевая трещина при достижении суммарного погонного момента максимума пройдет по дуге с радиусом (при $r_0/R \in (2; 6)$):

$$\frac{r_m}{R} = \frac{r_0}{R} \cdot \frac{(m_1 - 0,5)(1 - r_0/R) + \frac{H}{R} \text{ctg} \beta_1}{m_1(1 - r_0/R) + \frac{H}{R} \text{ctg} \beta_1}; \quad (63)$$

и дуге радиуса (при $r_0/R > 6$):

$$\frac{r_m}{R} = 0,5 \left(1 + \left(\frac{R}{r_0} \right)^{-1} + \frac{H \cdot \text{ctg} \beta_1}{R - r_0 + H \cdot \text{ctg} \beta_1} \right). \quad (64)$$

Анализ полученных результатов приводит к следующим выводам по влиянию кромочного момента $m_0 = 0,5(p_z r_0)H \text{ctg} \beta_1$ на изгиб клиньев льда:

— для клиновидных выступов с $R/r_0 < 2$ погонный изгибающий момент в заделке ($r_m = R$) уменьшается до значения

$$m_{\text{и}} = p_z (R - r_0 - 0,5H \text{ctg} \beta_1);$$

— для клиновидных секторов льда с $2 < R/r_0 < 6$ радиус разрушения сдвигается вглубь льда до значения, определяемого (63) с соответствующим уменьшением m_{ii} ;

— для протяженных секторов с $R/r_0 > 6$ кольцевая трещина отдалается от кромки на 3...7% с соответствующим увеличением моментов M_{ii} и m_{ii} .

Разрушение льда

Одной из главных целей изучения изгиба льда при взаимодействии с гидротехническими сооружениями, судами является определение максимальных (пиковых) контактных усилий и допустимой нагрузки P_z на ледовых переправах — решение задачи о прочности льда. Эти решения принадлежат различным авторам [13–15, 18] в зависимости от искомой постановки и применяемых методов решения исходных уравнений и зачастую сильно разнятся.

Укажем лишь на решения, основанные на обработке экспериментальных данных:

— в работе Каштеляна В. И. [15] для проломной нагрузки клина на упругом основании с центральным углом φ :

$$P_z = 0,52 \frac{\varphi}{\pi} \sigma_{ii} H^2, \quad (65)$$

где σ_{ii} — предел прочности льда на изгиб, определяемый по результатам испытаний консолей на плаву в соответствии с (36) без учета влияния упругого основания. Для центральной пластины $\varphi = 2\pi$, а для погонной силы, распределенной по кромке радиусом r_0 ,

$$P_z = 0,173 r_0^{-1} \sigma_{ii} H^2.$$

Результаты получены по большому числу экспериментов в ледовом бассейне ААНИИ в 50-х годах прошлого века;

— данные исследования Панфилова Д. Ф. [18, 19] по обработке натурных испытаний льда, которые можно привести для клина к виду:

$$P_z = (0,62 \pm 0,012 + 1,05 \alpha r_0) \frac{\varphi}{\pi} \sigma_{ii} H^2; \\ P_z = ((0,2 \pm 0,004) r_0^{-1} + 0,334 \alpha) \sigma_{ii} H^2. \quad (66)$$

Результаты проведенных авторами исследований позволяют решать задачу о разрушающих лед усилиях в момент образования первой кольцевой трещины с двух позиций. В рамках внешней задачи полученные решения, например, (59) для конкретного клина приравнять погонному моменту (38), определяемому по результатам разрушения ледовых клавиш с учетом влияния реакции упругого основания. А затем, из равенства моментов определить разрушающие усилия p_z или суммарную нагрузку $P_z = p_z r_0 \varphi$. Например, для случая центрального изгиба (см. рис. 3)

$$P_z = 4,2 \sigma_{ii} H^2 \frac{1 - 16,1 \sigma_{ii}^{-1} \omega_0 \bar{l}^2}{R/r_0 - 1}, \text{ кН}, \quad (67)$$

где длина радиальной трещины R определяется по (57). После введения обоснованного значения коэффициента запаса прочности $k \geq 1$, допустимая нагрузка при крат-

ковременном пребывании груза обеспечит безопасность ледовой переправы.

Определение внутренних сил в сечениях льда при изгибе, выполненное в рамках аппроксимации эпюр напряжений (31), позволяет по известному пределу прочности верхнего зернистого слоя льда σ_{p2} первоначально выразить необходимую кривизну нейтрального слоя в месте (сечении) разрушения, а затем, используя связь кривизны с кромочной нагрузкой, определить внешние силы, разрушающие лед по кольцевой трещине. Покажем это на примере задачи центрального изгиба поля льда. С использованием выражения (54) для функции прогиба $\omega(r)$ кривизна в полярных координатах на радиусе $r_m = 0,5(R + r_0)$:

$$\frac{d^2 \omega}{dr^2} + r^{-1} \frac{d\omega}{dr} = -18 \frac{p_z r_0}{E' H^3} \cdot \frac{(R/r_0 + 0,816)(R/r_0 - 4,44)}{(R/r_0)^2 - 1}.$$

По формуле (31) искомая кромочная разрушающая лед погонная нагрузка будет равна:

$$p_z = \frac{\sigma_{p2} H^2}{18 r_0} \frac{E'}{E_{ю}(0)} \left(\frac{H_2}{H} \right)^{-1} \frac{(R/r_0)^2 - 1}{(R/r_0 + 0,816)(R/r_0 - 4,44)}, \quad (68)$$

где приведенный модуль E' определяется по (35), а длина нормальной трещины R/r_0 по (58). Соответствующая суммарная вертикальная сила p_z будет в $2\pi r_0$ раз больше. Аналогично с использованием зависимостей (54), (55), (56) могут быть решены задачи по разрушению выступов и клиновидных секторов льда $2 < R/r_0 < 6$.

Заключение

Для решения задач упругопластического изгиба однородных по структуре, температуре и солёности решен вопрос о деформации льда в условиях чистого изгиба. Для реального льда с переменными по его толщине характеристиками предложены параболические эпюры напряжений. В обоих случаях применялся прием наращивания сжатого слоя льда.

Показано, что разрушение льда начинается с образования системы нормальных трещин, которые разделяют его на клиновидные сектора. Их дальнейший прогиб происходит в условиях одноосного напряженного состояния. На основании условия Навье в полярных координатах рассматриваются изгибы клиньев различной протяженности.

Полученные результаты позволяют определять разрушающие лед силы с двух разных позиций. Приводятся варианты конечных инженерных формул. Анализ полученных материалов показывает, что основные проблемы расчетов связаны с достоверным определением положения нейтрального слоя льда при его изгибе.

После образования первой (наиболее удаленной) кольцевой трещины происходит образование следующих трещин меньшего радиуса с увеличением нагрузки P_z (см. рис. 3) — грузоподъемность льда не исчерпана. Расчет дальнейшего деформирования льда проблематичен из-за образования пластичного шарнира (добавочного момента) на первой кольцевой трещине [10] и связанных с этим неопределенностей.

Литература

1. Доронин Ю. П., Хейсин Д. Е. Морской лёд. Л.: Гидрометеоздат, 1975. 318 с.
2. Веприняк И. А., Кошкин С. В. Определение косвенной физико-механической характеристики морского льда — предела прочности при изгибе // Вестник Международной академии холода. 2021 № 3. С. 81–89. DOI: 10.17586/1606-4313-2021-20-3-81-89
3. Кошкин С. В. Современное состояние баз данных по пределам прочности льда на сжатие для проектирования опор железнодорожных мостов и гидротехнических сооружений / В сборнике статей всероссийской НПК «Инновационные технологии в транспортном строительстве» // Петергоф. ВИ (ЖДВ и ВОСО). 2021. С. 101–120.
4. Веприняк И. А., Кошкин С. В. Аналитическое представление температурного профиля морского льда в весенне — летний период на северном морском пути // Вестник Международной академии холода. 2022 № 4. С. 68–75. DOI: 10.17586/1606-4313-2022-21-4-68-75
5. Кошкин С. В., Афанасьева Т. М., Яковлева Е. М. Аналитическая модель профили солености и объемного содержания рассола морского льда в Арктике / Сборник статей Всероссийской НПК «Искровые технологии в транспортном строительстве» // СПб, Петергоф, ВИ (ЖДВ и ВОСО). 2022. С. 72–80.
6. Кошкин С. В., Веприняк И. А., Чижиумов С. Д. Аналитические основы реологии льда. // Вестник Международной академии холода. 2024. № 4. С. 58–64. DOI: 10.17586/1606-4313-2024-23-4-58-64
7. Вершинин С. А. Воздействие льда на морские сооружения шельфа // Итоги науки и техники, сер. Водный транспорт. т. 13. М.: ВИНТИ, 1988. 221 с.
8. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев: Наукова думка, 1988. 736 с.
9. Якунин А. Е. Расчет ледяного покрова с учетом изменения модуля деформации по его толщине // Труды НИИЖТ. 1967. Вып. 60. С. 87–101.
10. Ионов Б. П., Грамузов Е. М. Ледовая ходкость судов. СПб.: Судостроение, 2001. 512 с.
11. Андреев О. М. Термодинамическое моделирование формирования морского ледяного покрова в Арктике. Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук СПб.: ААНИИ, 2005. 20 с.
12. Рывлин А. Я. Метод прогнозирования предела прочности ледяного покрова на изгиб // Проблемы Арктики и Антарктики. 1974. № 45. С. 79–86.
13. Песчанский И. С. Ледоведение и ледотехника. Л.: Гидрометеоздат, 1976. 461 с.
14. Сазонов К. Е., Лукьянов С. В., Владимиров О. М. Основы физики морского льда. Учебное пособие для ВУЗов. СПб.: РГГУ, 2023. 148 с.
15. Каштелян В. И. Приближённое определение усилий, разрушающих ледяной покров // Проблемы Арктики и Антарктики. 1960. № 5. С. 31–37.
16. Зуев В. А., Кошкин С. В. Напряженное состояние ледяного поля при движении ледокола // Труды ЛКИ, Ледопроектирование и ледовая прочность морских судов. 1979. С. 77–86.
17. Горб А. М. Расчет конструкций полов на основе гипотезы коэффициента постели // Мир строительства и недвижимости. 2023. С. 1–7.

References

1. Doronin Yu. P., Kheisin D. E. Sea ice. L.: Gidrometeoizdat, 1975. 318 p. (in Russian)
2. Veprinyak I. A., Koshkin S. V. Determination of the indirect physical and mechanical characteristics of sea ice — ultimate strength in bending. *Journal International Academy of Refrigeration*. 2021 no 3 p. 81–89. DOI: 10.17586/1606-4313-2021-20-3-81-89 (in Russian)
3. Koshkin S. V. Current state of databases on the compressive strength of ice for the design of supports for railway bridges and hydraulic structures. *In the collection of articles of the All-Russian Scientific and Production Complex «Innovative Technologies in Transport Construction»*. Petergof. Military institute (GDV and VOSO). 2021. pp. 101–120. (in Russian)
4. Veprinyak I. A., Koshkin S. V. Analytical presentation of sea ice's temperature profile in spring-summer period on the northern sea route. *Journal of International Academy of Refrigeration*. 2022. No 4. p. 68–75. DOI: 10.17586/1606-4313-2022-21-4-68-75 (in Russian)
5. Koshkin S. V., Afanasyeva T. M., Yakovleva E. M. Analytical model of salinity profiles and volume content of sea ice brine in the Arctic. *Collection of articles of the All-Russian Scientific and Industrial Complex «Spark technologies in transport construction»*. 2022 pp. 72–80. (in Russian)
6. Koshkin S. V., Veprinyak I. A., Chizhiumov S. D. Analytical foundations of ice rheology. *Journal of International Academy of Refrigeration*. 2024. No 4. p. 58–64. DOI: 10.17586/1606-4313-2024-23-4-58-64 (in Russian)
7. Vershinin S. A. Impact of ice on offshore structures of the shelf. *Results of science and technology, ser. Water transport*. v. 13. M.: VINITI. 1988. 221 p. (in Russian)
8. Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveev V. V. Handbook of Strength of Materials. Kyiv: Naukova Duma. 1988. 736 p.
9. Yakunin A. E. Calculation of the ice sheet taking into account the change in the modulus of deformation in its thickness. *Proceeding of the NJRT*. 1967. Vol. 60. p. 87–101. (in Russian)
10. Ionov B. P., Gramuzov E. M. Ice performance of ships. St. Petersburg: Shipbuilding. 2001. 512 p. (in Russian)
11. Andreev O. M. The thermodynamic modeling of the formation of the sea ice cover in the Arctic. Abstract of dissertation candidate of physical and mathematical science. SPb: AANRJA. 2005. 20 p. (in Russian)
12. Ryvlin A. Ya. Method for predicting the ultimate strength of ice cover on bending. *Problems of the Arctic and Antarctic*. 1974. no. 45. p. 79–86. (in Russian)
13. Peschansky I. S. Ice science and ice engineering. L.: Hydrometeoizdat. 1976. 461 p. (in Russian)
14. Sazonov K. E., Lukyanov S. V., Vladimirova O. M. Fundamentals of sea ice physics. Textbook for universities. SPb. RSHV. 2023. 148 p. (in Russian)
15. Kashtelyan V. I. Approximate determination of the forces that destroy the ice cover. *Problems of the Arctic and Antarctic*. 1960. No. 5. pp. 31–37 (in Russian)
16. Zuev V. A., Koshkin S. V. The stressed state of the ice field during icebreaker movement. *Proceedings of the LSBJ. Ice penetration and ice strength of sea vessels*. 1979. p. 77–86 (in Russian)
17. Gorb A. M. Calculation of floor structures based on the bed coefficient. *The world of construction and real estate*. 2023. p. 1–7. (in Russian)

18. Вершинин С. А. Пролом и грузоподъемность ледяного поля при кратковременных статических и квазистатических нагрузках // Материалы конференций и совещаний по гидротехнике. Л.: Энергия, 1979. С. 92–96.
19. Панфилов Д. Ф. Экспериментальное исследование несущей способности ледяных полей // Известия ВНИИГ, 1960, Вып. 64, С. 101–115.
18. Vershinin S. A. Brearage and lifting capacity of the ice field under short-term and quasi-static loads. *Materials of conferences and meeting of hydralis engineering*. L.: Energy, 1979, p. 92–96 (in Russian)
19. Panfilov D. F. Experiment study of the bearing capacity of ice fields. *Izvestiya VNIIIG*, 1960, Issue 64, p. 101–115 (in Russian)

Сведения об авторах

Кошкин Сергей Валентинович

К. т. н., доцент кафедры общетехнических дисциплин Военного института (Железнодорожных войск и военных сообщений) Военной академии материально — технического обеспечения имени генерала А. В. Хрулева, 198511, г. Петергоф, ул. Суворовская 1, sergey.koshkin1950@yandex.ru

Веприняк Иван Алексеевич

Д. т. н., заведующий кафедрой общетехнических дисциплин Военного института (Железнодорожных войск и военных сообщений) Военной академии материально-технического обеспечения имени генерала А. В. Хрулева, 198511, г. Петергоф, ул. Суворовская 1, veprenyak1@mail.ru

Information about authors

Koshkin Sergey V.

Ph. D., Associate Professor of Department of General Technical Disciplines Military Institute (of Railway Troops and Military Transport) of Khrulev Military Academy of Logistics, Russia, 198511, Peterhof, ul. Suworovskaya, 1, sergey.koshkin1950@yandex.ru

Veprinyak Ivan A.

D. Sc., Head of Department of General Technical Disciplines Military Institute (of Railway Troops and Military Transport) of Khrulev Military Academy of Logistics, Russia, 198511, Peterhof, ul. Suworovskaya, 1, veprenyak1@mail.ru



Статья доступна по лицензии
Creative Commons «Attribution-NonCommercial»



24-я Международная выставка оборудования для
производства молока и молочной продукции

DairyTech 2026

27–29 января 2026 г.

Международная выставка **DairyTech** — это единственная в России специализированная площадка, где представлен полный спектр оборудования не только для переработки молока и производства молочной продукции, но и современные технологии для мясоперерабатывающей отрасли.

РАЗДЕЛЫ ВЫСТАВКИ:

- ❖ Оборудование для приемки молока.
- ❖ Оборудование и технологии для переработки молока.
- ❖ Упаковочное оборудование и технологии.
- ❖ Ингредиенты и закваски для молочных продуктов, напитков.
- ❖ Оборудование и технологии для производства мороженого.
- ❖ Холодильное и морозильное оборудование.
- ❖ Маркировочное оборудование. Готовая упаковка и этикетка.
- ❖ Оборудование и технологии для розлива.
- ❖ Программы и средства автоматизации производства.
- ❖ Оборудование и технологии для переработки мяса.
- ❖ Сервис и инжиниринг для пищевых производств.

Место проведения:

Россия, Москва, МВЦ «Крокус Экспо»,
павильон 1
<http://www.crocus-expo.ru>

Организатор выставки: ITE Group

Горячая линия:
+7 (495) 799-55-85
E-mail: md@ite.group
<https://dairytech-expo.ru/ru/>