

УДК 536.2

Модель охлаждения жидкости, которая демонстрирует проявление эффекта Мпембы

Д-р техн. наук В. Н. КОЛОДЕЖНОВ

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. профессора
Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»

E-mail: kvn117@mail.ru

Достаточно давно замечено, что при определенных условиях изначально более горячая вода замерзает несколько быстрее, чем изначально более холодная. Такой парадокс получил название эффекта Мпембы. Несмотря на проявленный в последнее время интерес к этой тематике, окончательная теория такого эффекта не сформирована. В данной работе рассмотрена достаточно простая модель охлаждения жидкости, которая допускает проявление эффекта Мпембы. В качестве основного допущения предполагается, что коэффициент теплоотдачи зависит от начальной температуры жидкости. При этом более высоким значениям начальной температуры соответствует более высокое значение коэффициента теплоотдачи. Предложено качественное обоснование такому допущению. Приводятся результаты численных экспериментов по оценке влияния основных параметров модели на проявление эффекта Мпембы, которые могут быть учтены при проектировании охлаждающего оборудования.

Ключевые слова: эффект Мпембы, коэффициент теплоотдачи, начальная температура, время охлаждения.

Информация о статье:

Поступила в редакцию 29.10.2025, одобрена после рецензирования 18.12.2025, принята к печати 14.01.2026

DOI: 10.17586/1606-4313-2026-25-1-82-89

Язык статьи — русский

Для цитирования:

Колодежнов В. Н. Модель охлаждения жидкости, которая демонстрирует проявление эффекта Мпембы. // Вестник Международной академии холода. 2026. № 1. С. 82–89. DOI: 10.17586/1606-4313-2026-25-1-82-89

A liquid cooling model that demonstrates the manifestation of the Mpemba effect

D. Sc. V. N. KOLODEZHNOV

Military Educational and Scientific Centre of the Air Force

N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Air Force Academy

E-mail: kvn117@mail.ru

It has long been observed that, under certain conditions, initially hotter water freezes somewhat faster than initially colder water. This paradox is known as the Mpemba effect. Despite recent interest in this topic, a definitive theory of this effect has not been developed. This paper considers a relatively simple model of liquid cooling that allows for the Mpemba effect to occur. The key assumption is that the heat transfer coefficient depends on the initial temperature of the liquid. Higher initial temperatures correspond to higher heat transfer coefficients. A qualitative justification for this assumption is proposed. The results of numerical experiments on assessing the influence of the main parameters of the model on the manifestation of the Mpemba effect are presented, which can be taken into account when designing cooling equipment.

Keywords: Mpemba effect, heat transfer coefficient, initial temperature, cooling time.

Article info:

Received 29/10/2025, approved after reviewing 18/12/2025, accepted 14/01/2026

DOI: 10.17586/1606-4313-2026-25-1-82-89

Article in Russian

For citation:

Kolodezhnov V. N. A liquid cooling model that demonstrates the manifestation of the Mpemba effect. *Journal of International Academy of Refrigeration*. 2026. No 1. p. 82-89. DOI: 10.17586/1606-4313-2026-25-1-82-89

Введение

Процессы теплообмена широко распространены в технике и технологиях.

С точки зрения общей теории, теплообмен достаточно хорошо изучен [1, 2].

Одним из весьма распространенных теплообменных процессов является процесс охлаждения, который постоянно наблюдается и реализуется, как в природе, так и в самых различных производствах. При этом, как очевидный факт, полагается, что изначально более горячая жидкость (например, вода) охлаждается до температуры замерзания за более длительное время, нежели такая же жидкость, но имеющая в начале процесса охлаждения более низкую температуру. Однако уже достаточно давно на уровне наблюдений отмечалось контринтуитивное, парадоксальное явление, которое заключается в следующем. В некоторых случаях изначально более горячая вода замерзает быстрее по сравнению с изначально более холодной водой. Такие наблюдения описывались, например, в работе «Метеорологика» Аристотеля еще в IV веке до н. э., а также в более поздних трудах XIII–XVIII столетий ученых Р. Бэкона, Д. Марлиани, Ф. Бэкона, Р. Декарта, Дж. Блэка и других. Всплеск интереса к этому парадоксу в современное время обычно связывают с работой [3], по фамилии одного из соавторов которой это явление, не уточняя деталей его «переоткрытия», получило название — эффект Мпембы.

Вслед за этой статьей были проведены самые разнообразные как теоретические, так и экспериментальные исследования такого феномена.

В целом ряде публикаций подтверждалось существование эффекта и, соответственно, предлагались различные варианты его обоснования.

В качестве причин, объясняющих проявление эффекта Мпембы, как правило, выдвигали: естественную конвекцию в охлаждаемом сосуде [4], переохлаждение жидкости [5]–[8], более интенсивное испарение горячей воды по сравнению с холодной [9, 10], различное содержание растворенных газов в горячей и холодной воде [11], растворенные примеси и наличие твердых микрочастиц, как инициаторов начала кристаллообразования [12], влияние нагрева на водородные связи в молекулах воды [13, 14] и другие. Следует обратить внимание на то, что ни один из приведенных факторов, принимаемых за основу при попытках объяснить этот эффект, не является универсальным, хотя каждый из них может оказывать влияние на конечные результаты. При этом важно отметить, что во многих работах отмечается сравнительно не высокая экспериментальная воспроизводимость такого явления [15]–[18]. Можно предположить, что это связано, в том числе, с не учетом отдельными исследователями влияния всей совокупности приведенных выше факторов.

К этому следует добавить, что в ряде работ также отмечается необходимость конкретизации, собственно говоря, самого понятия замерзания как вообще, так и при интерпретации каждого конкретно проведенного эксперимента, в частности. Правомерна постановка следующих вопросов. Каким образом констатировать проявление эффекта? По возникновению только первых кристаллов твердой фазы (льда), или же проводить фиксацию про-

явления эффекта при полном замерзании всего объема жидкости? Например, в некоторых работах проявление или отсутствие эффекта оценивали по массе льда, образовавшегося в сосуде в течение заданного времени [19]. При констатации завершения рассматриваемого процесса охлаждения важной является и локация первого проявления фазового перехода: на свободной поверхности жидкости, на твердых стенках сосуда или в основном объеме жидкости.

Одновременно с этими результатами в ряде других публикаций, наоборот, аргументированно (со ссылками на законы термодинамики) утверждалось, что эффект Мпембы «не работает» в принципе [17]–[20]. При этом данное наблюдение объяснялось несовершенством постановки эксперимента, наличием неучтенных побочных факторов, особенностями методики проведения измерений и т. п.

В дополнение к теоретическому анализу неоднократно проводилась и экспериментальная проверка эффекта [17, 20]. В частности, например, тщательно поставленные эксперименты с тремя одинаковыми порциями воды, находящимися в одинаковых условиях (с учетом предварительного термостатирования, формы сосуда, теплоизоляции, и т. п.), но различающиеся только начальными температурами, показали, что эффект Мпембы не наблюдается [17]. Как и ожидалось, время замерзания наиболее горячей порции воды оказалось самым продолжительным. Казалось бы, на проблеме была поставлена окончательная точка.

Но уже вскоре были получены новые результаты, в которых эффект Мпембы рассматривался в рамках неравновесной марковской динамики [21]–[23]. Аналогии с эффектом Мпембы были обнаружены и в целом ряде других систем [24]–[29]. Более того, появилась информация о наблюдении или теоретическом предсказании так называемого обратного эффекта Мпембы [21, 22, 30–32].

В работах [30, 33, 34] были проведены экспериментальные наблюдения проявления этого эффекта в коллоидной системе (жидкость с мелкодисперсными частицами) с использованием методики, основанной на принципе «оптического пинцета». В экспериментах проводилось прямое наблюдение за изменением энергии отдельных частиц с размерами порядка 1 микрометра, совершающими тепловое хаотическое движение в жидкости (броуновское движение).

Анализируя результаты из известных литературных источников и подводя промежуточный итог с учетом заявляемых в них полярных точек зрения, можно видеть, что в настоящее время пока отсутствует окончательно завершенная теория проявления эффекта Мпембы. Вместе с тем исследования в этом направлении продолжаются [23].

Как это отмечалось выше, во многих работах последнего времени проявление эффекта Мпембы рассматривают в термодинамических и других системах, как стохастический процесс, описываемый на основе формализма марковской динамики применительно к отдельным частицам. Вместе с тем представляет интерес провести моделирование этого явления детерминированно в рамках традиционного подхода к описанию тепловых процессов в сплошной среде.

В данной работе предлагается достаточно простая модель теплообмена жидкости с окружающей средой, в которой проводится рассмотрение процесса охлаждения лишь на уровне изменения средней температуры. При этом формально, в модели напрямую не учитывается ни один из приведенных выше известных факторов, привлекаемых для обоснования эффекта Мпембы. Однако предполагается, что по совокупности все отмеченные выше факторы и, возможно, другие не известные на настоящий момент обстоятельства, интегрально проявляют себя в рассматриваемой модели через зависимость коэффициента теплоотдачи на свободной поверхности охлаждаемой жидкости от ее начальной температуры. С учетом такого допущения в рамках традиционной детерминированной модели теплопереноса показано, что при определенных значениях начальной температуры (для двух вариантов более холодной и более горячей жидкости) может иметь место контринтуитивный результат, когда изначально более горячая жидкость остывает до заданной температуры быстрее, нежели жидкость, которая была изначально более холодной.

Постановка задачи и система допущений

Рассмотрим модельную задачу охлаждения жидкости в следующей постановке.

Пусть сосуд с теплоизолированными стенками заполнен жидкостью, на свободной поверхности которой происходит теплообмен с окружающей средой при заданном значении коэффициента теплоотдачи. В первом приближении предположим, что процесс теплообмена жидкости с окружающей средой допустимо описывать ее средней температурой T , которая представляет собой неизвестную функцию времени t .

Такой, в целом упрощенный, подход к описанию процесса охлаждения на уровне средних температур можно использовать при рассмотрении нестационарного теплопереноса в случаях сравнительно небольших значений чисел Био [2]. При этом конвекцией жидкости внутри сосуда будем пренебрегать, полагая, по сути, жидкость неподвижной. В такой модели процесс охлаждения неподвижной жидкости допустимо рассматривать подобным процессу охлаждения твердого тела.

Тогда динамику изменения средней температуры охлаждаемой жидкости можно определять из решения следующего уравнения

$$c\rho V \frac{dT}{dt} = -\alpha(T_0) \cdot (T - T_s(t))S, \quad (1)$$

с начальным условием

$$t=0; T=T_0, \quad (2)$$

где c, ρ — удельная теплоемкость и плотность жидкости, соответственно; V, S — объем и площадь свободной поверхности (площадь поверхности теплообмена) жидкости в сосуде, соответственно; $\alpha(T_0)$ — коэффициент теплоотдачи на свободной поверхности жидкости, представляющий собой заданную функцию ее начальной температуры T_0 ; $T_s(t)$ — температура окружающей среды в окрестности свободной поверхности жидкости, представляющая заданную функцию времени.

Допущение о возможной зависимости коэффициента теплоотдачи $\alpha(T_0)$ от начальной температуры может быть обосновано следующим образом.

Как правило, при моделировании теплообменных процессов предполагается, что коэффициент теплоотдачи не изменяется с течением времени и принимает некоторое постоянное усредненное значение. Вместе с тем, можно предположить, что этот параметр зависит от начальной температуры процесса охлаждения. Действительно, в реальной ситуации при охлаждении изначально более горячей жидкости, в принципе, на начальной стадии процесса на самом деле интенсифицируются факторы конвективного теплообмена, испарения на свободной поверхности, влияния растворенных газов и другие, которые напрямую в модели не учитываются. Поэтому в каждый конкретный момент времени (особенно на начальной стадии охлаждения) эти обстоятельства могут вносить свой дополнительный вклад в локальное (по времени) значение коэффициента теплоотдачи. В этой связи допущение о постоянстве коэффициента теплоотдачи в моделях, априори, предполагает следующую процедуру. Итоговое его значение должно быть получено, вообще говоря, усреднением локальных значений коэффициента теплоотдачи на всем временном интервале охлаждения, начиная от начального момента времени и заканчивая моментом достижения конечной температуры замерзания. Если же рассматривается процесс охлаждения жидкости с более низкой начальной температурой, то влияние отмеченных выше факторов может оказаться менее существенным. В итоге усредненный коэффициент теплоотдачи для охлаждения изначально более горячей жидкости может оказаться больше усредненного коэффициента теплоотдачи при охлаждении изначально более холодной жидкости.

В этой связи рассмотрим случай, когда усредненный по времени охлаждения коэффициент теплоотдачи в диапазонах более низкой и более высокой начальных температур имеет различные значения. Предположим, что на всем интервале изменения начальных температур такую зависимость в первом приближении допустимо аппроксимировать непрерывной кусочно-линейной функцией вида

$$\alpha(T_0) = \begin{cases} \alpha_1; & T_f < T_0 < T_{01}; \\ \beta + \gamma T_0; & T_{01} < T_0 < T_{02}; \\ \alpha_2; & T_{02} < T_0 < T_b; \end{cases} \quad (3)$$

где T_f — минимально допустимая температура процесса (например, температура замерзания жидкости); T_b — максимально допустимая температура процесса (например, температура кипения); T_{01}, T_{02} — некоторые характерные значения начальной температуры, определяющие диапазон изменения коэффициента теплоотдачи, например, по линейному закону в зависимости от начальной температуры; α_1, α_2 — значения коэффициентов теплоотдачи на крайних нижнем и верхнем диапазонах начальной температуры при условии, что $\alpha_2 > \alpha_1$; β, γ — постоянные коэффициенты, обеспечивающие непрерывность изменения усредненного коэффициента теплоотдачи на всем диапазоне изменения начальной температуры и вычисляемые следующим образом:

$$\beta = \frac{\alpha_1 T_{02} - \alpha_2 T_{01}}{T_{02} - T_{01}}; \quad \gamma = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{T_{02} - T_{01}}. \quad (4)$$

В приведенном выше уравнении (1) также предполагается, что температура окружающей среды $T_s(t)$ представляет собой заданную функцию времени. Опять же заметим, что, зачастую, полагают постоянство температуры окружающей среды. Однако для нестационарного теплопереноса с течением времени по мере охлаждения жидкости в окрестности ее свободной поверхности в пограничном слое окружающей среды предположительно будет происходить ее нагрев. Строго говоря, такие задачи должны рассматриваться в сопряженной постановке. В этой связи, в рассматриваемой модели эту особенность температуры окружающей среды предлагается в первом приближении учесть введением монотонно возрастающей функции времени. Предположим, что, упрощенно, такая зависимость имеет следующий вид

$$T_s(t) = T_f + (T_{s\infty} - T_f) \cdot \left(q + (1-q) \cdot \exp\left\{ -\frac{k \cdot \lambda \cdot t}{c \cdot \rho \cdot S} \right\} \right); \quad (5)$$

$$T_{s\infty} < T_f; \quad 0 \leq q \leq 1; \quad k > 0,$$

где $T_{s\infty}$ — предполагаемая постоянной температурой окружающей среды на значительном расстоянии (в рамках модели — на бесконечности) от свободной поверхности жидкости; q, k — эмпирические параметры, определяющие разогрев окружающей среды в окрестности свободной поверхности охлаждаемой жидкости.

Зависимость вида (4) при монотонном асимптотическом повышении температуры окружающей среды с течением времени в окрестности поверхности теплообмена предполагает выполнение следующих условий:

$$T_s(0) = T_{s\infty};$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T_s(t) = T_f + q(T_{s\infty} - T_f).$$

При этом частный случай $q=1$ означает исполнение допущения о том, что температура окружающей среды в окрестности поверхности теплообмена принимает постоянное значение $T_{s\infty}$.

Перейдем к безразмерной форме записи исходных уравнений с учетом следующих соотношений

$$T' = \frac{T - T_f}{T_b - T_f}; \quad \text{Bi}(T'_0) = \frac{\alpha(T'_0) \cdot S^2}{\lambda \cdot V}; \quad \text{Fo} = t' = \frac{\lambda \cdot t}{c \cdot \rho \cdot S}, \quad (6)$$

где λ — коэффициент теплопроводности жидкости; $\text{Bi}(T'_0)$, Fo — числа Био и Фурье, соответственно.

Принимая во внимание выражения (3), (4), приходим к следующей форме представления зависимости числа Био от начальной температуры жидкости:

$$\text{Bi}(T'_0) = \begin{cases} \text{Bi}_1; & 0 < T'_0 < T'_{01}; \\ \beta' + \gamma' T'_0; & T'_{01} < T'_0 < T'_{02}; \\ \text{Bi}_2; & T'_{02} < T'_0 < 1; \end{cases} \quad (7)$$

При этом коэффициенты β' и γ' обеспечивают непрерывность функции $\text{Bi}(T'_0)$ и удовлетворяют условиям

$$\beta' = \frac{\text{Bi}_1 T'_{02} - \text{Bi}_2 T'_{01}}{T'_{02} - T'_{01}} = \frac{(\beta + \gamma \cdot T_f) \cdot S^2}{\lambda \cdot V};$$

$$\gamma' = \frac{\text{Bi}_2 - \text{Bi}_1}{T'_{02} - T'_{01}} = \frac{\gamma \cdot (T_b - T_f) \cdot S^2}{\lambda \cdot V};$$

$$\text{Bi}_1 = \frac{\alpha_1 S^2}{\lambda \cdot V}; \quad \text{Bi}_2 = \frac{\alpha_2 S^2}{\lambda \cdot V};$$

$$T'_{01} = \frac{T_{01} - T_f}{T_b - T_f}; \quad T'_{02} = \frac{T_{02} - T_f}{T_b - T_f}. \quad (8)$$

В выражениях (6)–(8) и далее, безразмерные величины отмечены верхним штрихом.

С учетом (6) уравнение (1) и начальное условие (2) принимают вид

$$\frac{dT'}{dt'} = -\text{Bi}(T'_0) \cdot (T' - T'_s(t')); \quad (9)$$

$$t' = 0; \quad T' = T'_0. \quad (10)$$

Здесь

$$T'_s(t') = T'_{s\infty} (q + (1-q) \cdot \exp\{-k \cdot t'\}).$$

Заметим, что наряду с (3) и (5), на модельном уровне допустимы и другие варианты возможной аппроксимации введенных выше зависимостей для коэффициента теплоотдачи и температуры окружающей среды в окрестности свободной поверхности жидкости.

Численные эксперименты с моделью и анализ полученных результатов

Решение уравнения (9) с начальным условием (10) может быть представлено следующим образом

$$T'(t', T'_0, \text{Bi}(T'_0)) = \left\{ T'_0 - T'_{s\infty} \left[q + (1-q) \frac{\text{Bi}(T'_0)}{\text{Bi}(T'_0) - k} \right] \right\} \times \exp\{-\text{Bi}(T'_0)t'\} + T'_{s\infty} \left\{ q + (1-q) \frac{\text{Bi}(T'_0)}{\text{Bi}(T'_0) - k} \exp\{-k \cdot t'\} \right\}. \quad (11)$$

Предположим, что в некоторый момент времени $t'_f = \text{Fo}_f = \text{Fo}_f(T'_0, \text{Bi}(T'_0))$ процесс охлаждения завершается и температура жидкости опускается до уровня температуры замерзания $T' = 0$. Из этого условия с учетом (11) приходим к следующему трансцендентному уравнению относительно времени охлаждения

$$\left\{ T'_0 - T'_{s\infty} \left[q + (1-q) \frac{\text{Bi}(T'_0)}{\text{Bi}(T'_0) - k} \right] \right\} \exp\{-\text{Bi}(T'_0)\text{Fo}_f\} + T'_{s\infty} \left\{ q + (1-q) \frac{\text{Bi}(T'_0)}{\text{Bi}(T'_0) - k} \exp\{-k\text{Fo}_f\} \right\} = 0. \quad (12)$$

Решение уравнения (12) проводили численно с привлечением ПЭВМ.

В наиболее простом частном случае, когда допустить полагать постоянство температуры окружающей среды ($q=1$), решение уравнения (11) существенно упрощается и принимает хорошо известный вид

$$T'(t') = T'_{s\infty} + (T'_0 - T'_{s\infty}) \cdot \exp\{-\text{Bi}(T'_0)t'\}. \quad (13)$$

Для такого частного случая безразмерное время охлаждения жидкости до конечной температуры замерзания определяется с учетом (13) в явной форме:

$$Fo_f = \frac{1}{Bi(T'_0)} \cdot \ln \left\{ 1 - \frac{T'_0}{T'_{S\infty}} \right\}. \quad (14)$$

В качестве примера на рис. 1 представлена зависимость безразмерного времени охлаждения Fo_f от начальной температуры жидкости T'_0 , построенная на основе решения уравнения (12) с учетом (7).

Главной особенностью полученной зависимости является то, что она демонстрирует немонотонный характер. На интервале $0 < T'_0 < T'_{01}$ эта зависимость, как и следовало бы на интуитивном уровне ожидать, показывает монотонное возрастание времени охлаждения по мере роста начальной температуры. Качественно такое же поведение имеет место и на интервале $T'_{02} < T'_0 < 1$. Однако, на участке AB , соответствующем промежуточному интервалу начальных температур $T'_{01} < T'_0 < T'_{02}$, имеет место монотонное убывание для времени охлаждения жидкости по мере возрастания ее начальной температуры.

Анализируя эту зависимость, можно видеть, что она предполагает демонстрацию проявления эффекта Мпембы, когда для более высокой начальной температуры жидкости (из пары двух значений начальных температур) время ее охлаждения оказывается более коротким. Для этого соответствующие значения пар начальных температур более холодной $T'_{0,cool}$ и более горячей $T'_{0,hot}$ жидкостей, для которых выполняется контринтуитивное условие

$$Fo_f(T'_{0,cool}) > Fo_f(T'_{0,hot}), \quad (15)$$

необходимо выбирать из диапазона:

$$T'_{0,min} < T'_{0,cool} < T'_{0,hot} < T'_{0,max}. \quad (16)$$

При этом крайние температурные граничные значения $T'_{0,min}$ и $T'_{0,max}$ этого диапазона должны определяться с учетом (12) из решения следующих уравнений вида

$$Fo_f(T'_{0,min}, Bi_1) = Fo_f(T'_{02}, Bi_2); \quad (17)$$

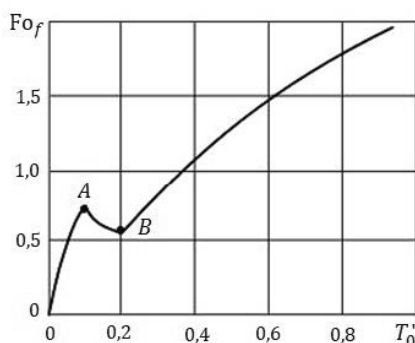


Рис. 1. Зависимость времени охлаждения жидкости от начальной температуры для следующих значений исходных параметров: $Bi_1 = 0,1$; $Bi_2 = 0,5$; $T'_{01} = 0,1$; $T'_{02} = 0,2$; $T'_{S\infty} = -0,6$; $k = 0,1$; $q = 0,4$

Fig. 1. Dependence of the cooling time of the liquid on the initial temperature for the following values of the initial parameters: $Bi_1 = 0.1$; $Bi_2 = 0.5$; $T'_{01} = 0.1$; $T'_{02} = 0.2$; $T'_{S\infty} = -0.6$; $k = 0.1$; $q = 0.4$

$$Fo_f(T'_{0,max}, Bi_2) = Fo_f(T'_{01}, Bi_1). \quad (18)$$

В частном случае, когда допустимо полагать $q = 1$, с учетом (14) из (17), (18) соответствующие значения для границ диапазона начальных температур (16) находятся в явной форме из следующих выражений:

$$T'_{0,min} = T'_{S\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{T'_{02}}{T'_{S\infty}} \right)^{Bi_1/Bi_2} \right];$$

$$T'_{0,max} = T'_{S\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{T'_{01}}{T'_{S\infty}} \right)^{Bi_2/Bi_1} \right].$$

Иллюстрация к проявлению эффекта Мпембы в рамках рассматриваемой модели схематично представлена на рис. 2.

Для начальных температур, соответствующих точкам D и E на монотонно убывающем участке AB выполнение условий (15), (16)

$$Fo_f(T'_{0,D}) > Fo_f(T'_{0,E}); \quad T'_{0,D} < T'_{0,E}$$

вполне ожидаемо. Однако, такие же условия, соответствующие проявлению эффекта Мпембы, выполняются и для других пар начальных температур, например, в точках C и D , а также C и E , C и K , D и K . Вместе с тем, при выборе других пар точек с начальными температурами из того же самого диапазона (16), например, C и A , E и K , B и K этот эффект не наблюдается.

Возможно, именно этим и объясняется отмечаемая многими исследователями не высокая воспроизводимость экспериментов по наблюдению эффекта Мпембы [15]–[18]. Действительно, сравнительно небольшие вариации в выборе начальных температур (особенно в окрестности значений T'_{01} и T'_{02}) или других параметров процесса переводят исследуемую систему из одного режима (традиционного, хорошо известного при реализации процесса охлаждения) в другой (нетрадиционный режим с проявлением эффекта Мпембы).

При этом, существенное влияние на ожидаемое проявление эффекта оказывает протяженность температурного диапазона между значениями T'_{01} и T'_{02} , а также «ме-

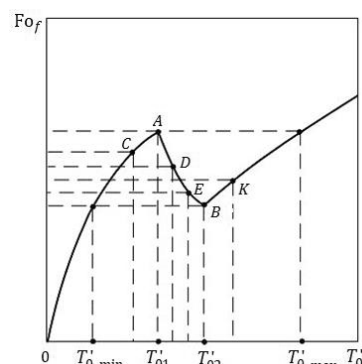


Рис. 2. Интерпретация проявления эффекта Мпембы в рамках рассматриваемой модели в зависимости от выбора пар начальных температур

Fig. 2. Interpretation of the manifestation of the Mpemba effect within the framework of the model under consideration depending on the choice of pairs of initial temperatures

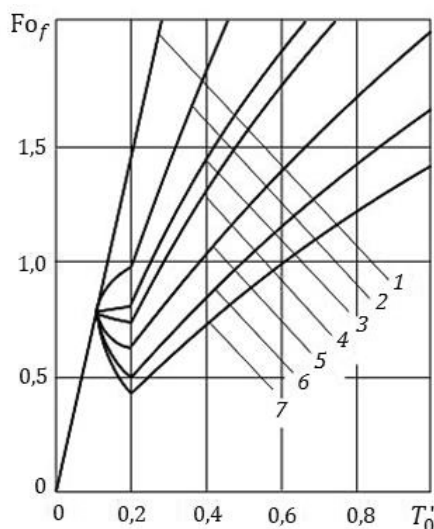


Рис. 3. Зависимость времени окончания процесса охлаждения от начальной температуры при $Bi_1 = 0,2$; $T'_{01} = 0,1$; $T'_{02} = 0,2$; $T'_{\infty} = -0,6$; $q = 1$; для следующих значений числа $Bi_2 = 0,2$ (1); 0,3 (2); 0,366 (3); 0,4 (4); 0,5 (5); 0,6 (6); 0,7 (7)

Fig. 3. Dependence of the time of the cooling process completion on the initial temperature at $Bi_1 = 0.2$; $T'_{01} = 0.1$; $T'_{02} = 0.2$; $T'_{\infty} = -0.6$; $q = 1$; for the following values of $Bi_2 = 0.2$ (1); 0.3 (2); 0.366 (3); 0.4 (4); 0.5 (5); 0.6 (6); and 0.7 (7)

сторасположение» этих значений на исходном температурном диапазоне от 0 до 1.

Наряду с этими обстоятельствами, влияющими на проявление эффекта Мпембы, следует отметить также и перепад между значениями Bi_1 и Bi_2 .

На рис. 3 представлены зависимости для времени окончания процесса охлаждения (до конечной температуры замерзания) от величины начальной температуры, построенные для различных значений числа Bi_2 при фиксированном значении Bi_1 .

Анализируя зависимости, представленные на рис. 3, можно видеть, что наиболее существенно эффект Мпембы проявляется при более высоких значениях перепада

$$\Delta Bi = (Bi_2 - Bi_1) \quad (19)$$

между числами Био, соответствующими крайним диапазонам для изначально более горячей и более холодной жидкости. И наоборот, снижение ΔBi приводит к сокращению протяженности интервала (16), внутри которого рекомендуется выбирать пары начальных температур, демонстрирующих проявление эффекта Мпембы. При этом достижение величиной перепада (19) некоторого критического значения $\Delta Bi = \Delta Bi_{crit}$ не монотонность рассматриваемой зависимости «исчезает» и далее, т. е. при $\Delta Bi < \Delta Bi_{crit}$, эффект Мпембы уже не реализуется в принципе. Для рассматриваемого примера $\Delta Bi_{crit} \approx 0,166$.

На рис. 4 для частного случая $q = 1$ представлены графики времени охлаждения жидкости в зависимости от начальной ее температуры, которые показывают влияние температуры окружающей среды на рассматриваемый процесс.

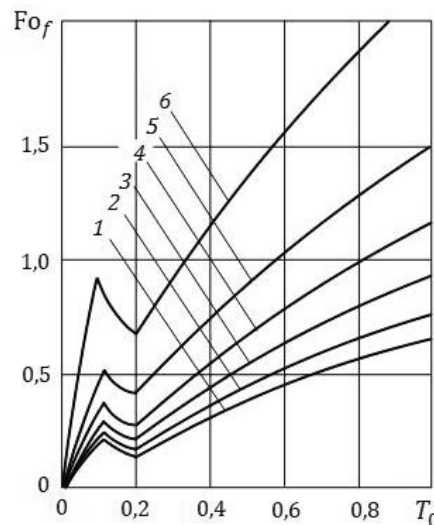


Рис. 4. Зависимость времени окончания процесса охлаждения от начальной температуры при $Bi_1 = 0,2$; $Bi_2 = 0,5$; $T'_{01} = 0,1$; $T'_{02} = 0,2$; $q = 1$; для следующих значений безразмерной температуры окружающей среды $T'_{\infty} = -2,5$ (1); $-2,1$ (2); $-1,7$ (3); $-1,3$ (4); $-0,9$ (5); $-0,5$ (6)

Fig. 4. Dependence of the time of the cooling process completion on the initial temperature at $Bi_1 = 0.2$; $Bi_2 = 0.5$; $T'_{01} = 0.1$; $T'_{02} = 0.2$; $q = 1$; for the following values of the dimensionless ambient temperature $T'_{\infty} = -2.5$ (1); -2.1 (2); -1.7 (3); -1.3 (4); -0.9 (5); -0.5 (6)

Как это следует из представленных данных, снижение температуры окружающей среды приводит к «сглаживанию» немонотонности рассматриваемой зависимости. В соответствии с этим сокращается (на модельном уровне стремится к нулю) временной диапазон между значениями $Fo_f(Bi_1, T'_{01})$ и $Fo_f(Bi_2, T'_{02})$, в котором согласно рассматриваемой модели возможно проявление эффекта Мпембы.

Выводы

Рассмотренный подход к описанию теплопереноса с учетом соответствующих допущений, по-видимому, напрямую, не является законченной моделью эффекта Мпембы. Однако полученные результаты показывают возможность проявления такого эффекта при определенных условиях, гипотетически заложенных в предложенную модель охлаждения.

Главным из введенных допущений является предположение о зависимости коэффициента теплоотдачи (который полагается усредненным на всем временном интервале реализации процесса охлаждения) от начальной температуры охлаждаемой жидкости. При этом считается, что охлаждению изначально более горячей жидкости соответствует более высокое значение усредненного коэффициента теплоотдачи. Здесь, предположительно, принимается во внимание возможный вклад в итоговое значение усредненного коэффициента теплоотдачи ряда неучтенных напрямую в рассматриваемой модели факторов, например, более интенсивного испарения жидкости при более высокой начальной температуре.

В рамках рассмотренной модели существует критическое значение $\Delta B_{i, \text{crit}}$ для перепада между числами Био, соответствующими крайним температурным диапазонам начальной температуры для изначально более горячей и более холодной жидкости. При этом снижение перепада ($\alpha_2 - \alpha_1$) между коэффициентами теплоотдачи для крайних диапазонов начальной температуры (более горячей, и более холодной воды) ниже некоторого порогового критического уровня, когда $\Delta B_i < \Delta B_{i, \text{crit}}$, эффект Мпембы не проявляется.

Сглаживанию проявления эффекта Мпембы, вплоть до отсутствия его фиксации, способствует также и снижение температуры окружающей среды.

Литература/References

1. Лыков В. В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с. [Lykov V. V. Theory of Heat Conduction. Moscow: Vysshaya Shkola Publishing House, 1967. 600 p. (in Russian)]
2. Королев В. Н., Островская А. В. Теоретические основы теплотехники. Теплоперенос. Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2021. 206 с. [Korolev V. N., Ostrovskaya A. V. Theoretical Foundations of Heat Engineering. Heat Transfer. Yekaterinburg: Ural University Publishing House, 2021. 206 p. (in Russian)]
3. Mpemba E. B., Osborne D. G. Cool? *Physics Education*. 1969. Vol. 4. № 3. С. 172–175.
4. Vynnycky M., Kimura S. Can natural convection alone explain the Mpemba effect? *International Journal of Heat and Mass transfer*. 2015. Vol. 80. Pp. 243–255. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer. 2014.09.015
5. Auerbach D. Supercooling and the Mpemba effect: When hot water freezes quicker than cold. *American Journal of Physics*. 1995. Vol. 63. No 10. pp. 882–885.
6. Monwhea Jeng. The Mpemba effect: When can hot water freeze faster than cold? *American Journal of Physics*. 2006. Vol. 74, No 6. pp. 514–522. DOI: 10.1119/1.2186331
7. Katz J. I. When hot water freezes before cold. *American Journal of Physics*. 2006. Vol. 77. No 1. pp. 27–29. DOI: 10.1119/1.2996187
8. Esposito S., De Risi R., Somma L. Mpemba effect and phase transitions in the adiabatic cooling of water before freezing. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2007. Vol. 387. No 4. pp. 757–763. DOI: 10.1016/j.physa. 2007.10.029
9. Kell G. S. The Freezing of Hot and Cold Water. *American Journal of Physics*. 1969. Vol. 37. No 5. pp. 564–565.
10. Vynnycky M., Mitchell S. L. Evaporative cooling and the Mpemba effect. *Heat and Mass Transfer*. 2010. Vol. 46. pp. 881–890. DOI: 10.1007/s00231-010-0637-z
11. Wojciechowski B., Owczarek I., Bednarz G. Freezing of aqueous solutions containing gases. *Crystal Research Technology*. 1988. Vol. 23. No 7. pp. 843–848.
12. Katz J. I. Reply to Burrigge & Linden: Hot water may freeze sooner than cold. 2017. DOI: 10.48550/arXiv. 1701.03219
13. Jin J., Goddard W. A. Mechanisms underlying the Mpemba effect in water from molecular dynamics simulations. *The Journal of Physical Chemistry C*. 2015. Vol. 119. No 5. pp. 2622–2629. DOI: 10.1021/jp511752n
14. Tyrovolas I. J. Explanation for the Mpemba Effect. *Journal of Modern Physics*. 2017. Vol. 8. No. 12. pp. 2013–2020. DOI: 10.4236/jmp. 2017.812121
15. Freeman M. Cooler still — an answer? *Physics Education*. 1979. Vol. 14. pp. 417–421.
16. Jeng M. The Mpemba effect: When can hot water freeze faster than cold? *American Journal of Physics*. 2006. Vol. 74, No. 6. pp. 514–522. DOI: 10.1119/1.2186331
17. Burrigge H. C., Linden P. F. Questioning the Mpemba effect: hot water does not cool more quickly than cold. *Scientific Reports*. 2016. Vol. 6. No. 1. DOI: 10.1038/srep37665
18. Bier M. The Rise and Fall of the Mpemba Effect. *Skeptical Inquirer*. 2023. Vol. 47, No. 4. P. 48–51.
19. Ahtee M. Investigation into the freezing of liquids. *Physical Education*. 1969. Vol. 4. pp. 379–380.
20. Brownridge J. D. When does hot water freeze faster than cold water? A search for the Mpemba effect. *American Journal of Physics*. 2011. Vol. 79. No 1. Pp. 78–84. DOI: 10.1119/1.3490015
21. Lu Z., Raz O. Nonequilibrium thermodynamics of the Markovian Mpemba effect and its inverse. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2017. Vol. 114, No 20. pp 5083–5088. DOI: 10.1073/pnas. 1701264114
22. Klich I., Raz O., Hirschberg O., Vucelja M. Mpemba Index and Anomalous Relaxation. *Physical Review X*. 2017. Vol. 9. No 2. DOI: 10.1103/PhysRevX. 9.021060
23. Teza G., Bechhoefer J., Lasanta A., Raz O., Vucelja M. Speedups in nonequilibrium thermal relaxation: Mpemba and related effects. 2025. 115 p. DOI: 10.48550/arXiv. 2502.01758
24. Chaddah P., Dash S., Kumar K., Banerjee A. Overtaking while approaching equilibrium. *arXiv preprint arXiv:1011.3598*. 2010.
25. Alex Greaney P., Lani G., Cicero G., Grossman J. C. Mpemba-like behavior in carbon nanotube resonators. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 2011. Vol. 42. pp. 3907–3912. DOI: 10.1007/s11661-011-0843-4
26. Ahn Y-H., Kang H., Koh D-Y., Lee H. Experimental verifications of Mpemba-like behaviors of clathrate hydrates. *Korean Journal of Chemical Engineering*, 2016. Vol. 33. pp. 1903–1907.
27. Lasanta A., Vega Reyes F., Prados A., Santos A. When the hotter cools more quickly: Mpemba effect in granular fluids. *Physical Review Letters*, 2017 Oct 6; 119 (14):148001. DOI: 10.1103/PhysRevLett. 119.148001
28. Дехтярь В. А., Дубинов А. Е., Колесов Г. Н. Наблюдение плазменного аналога эффекта Мпембы. // Химия высоких энергий, 2023. Т. 57. № 4. С. 255–259. DOI: 10.31857/S0023119323040071 [Dekhtyar V. A., Dubinov A. E., Kolesov G. N. Observation of a plasma analogue of the Mpemba effect. *High Energy Chemistry*, 2023. vol. 57. No 4. pp. 255–259. (in Russian)]
29. Finkelstein A. V. Analogue of the Mpemba effect in classical mechanics. 2025. DOI: 10.48550/arXiv. 2503.22387
30. Kumar A. Inverse Mpemba Effect. In *Anomalous Relaxation in Colloidal Systems*. Part of the book series: Springer Theses. Recognizing Outstanding Ph. D. Research. Springer, 2022. 135 p.
31. Kumar A., Chetrite R., Bechhoefer J. Anomalous heating in a colloidal system. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2022. Vol. 119. No 5. e2118484119. pp. 1–6. DOI: 10.1073/pnas. 2118484119
32. Sugimoto K., Kuwahara T., Saito K. Prethermal inverse Mpemba effect. 2025. 9 p. <https://doi.org/10.48550/arXiv. 2507.04669>
33. Kumar A., Bechhoefer J. Exponentially faster cooling in a colloidal system. *Nature*. 2020. Vol. 584 (7819). pp. 64–68. DOI: 10.1038/s41586-020-2560-x
34. Bechhoefer J., Kumar A., Chetrite R. A fresh understanding of the Mpemba effect. *Nature Reviews Physics*. 2021. Vol. 3. August. pp. 534–535. DOI: 10.1038/s42254-021-00349-8

Сведения об авторе

Колодезнов Владимир Николаевич

Д. т. н., профессор кафедры общепрофессиональных дисциплин, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54а, kvn117@mail.ru, ORCID 0000-0002-2543-9453

Information about author

Kolodezhnov Vladimir N.

D. Sc., Professor of the Department of General Professional Disciplines, Military Educational and Scientific Centre of the Air Force N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Air Force Academy, Russia, 394064, Voronezh, st. Staryh Bolshevikov, 54a, kvn117@mail.ru, ORCID 0000-0002-2543-9453



Статья доступна по лицензии
Creative Commons «Attribution-NonCommercial»



31-я международная выставка «Оборудование, технологии, сырье и ингредиенты для пищевой и перерабатывающей промышленности» 28 сентября – 1 октября 2026 г.

«АГРОПРОДМАШ» – международная выставка оборудования, машин и ингредиентов для пищевой и перерабатывающей промышленности – на протяжении трех десятилетий демонстрирует лучшие мировые достижения, способствуя внедрению новых современных технологий российскими предприятиями пищевой и перерабатывающей промышленности.

«АГРОПРОДМАШ» – идеальный инструмент для развития бизнеса:

- лучшие технологические решения в сфере переработки и производства продуктов питания;
- прогрессивные системы промышленной автоматизации предприятий пищевой и перерабатывающей промышленности;
- инновационные материалы, оборудование и проекты в сфере упаковки;
- экологически безопасные безотходные технологии;
- новейшее программное обеспечение.

«АГРОПРОДМАШ» – абсолютный лидер среди выставок России по тематике «Пищевая промышленность, оборудование и ингредиенты» во всех категориях:

✓ Пищевые технологии.	✓ Ингредиенты.
✓ Оболочки.	✓ Пищевая безопасность.
✓ МясоПром.	✓ Холод.
✓ ПтицеПром.	✓ УпаковМаш.
✓ РыбПром.	✓ Пищевая безопасность.
✓ КондитерПром.	✓ Весовое и измерительное оборудование.
✓ ХлебПром.	✓ Склад, логистика.
✓ ЗерноПром.	✓ Автоматизация.
✓ ФруктПром.	✓ Санитария и гигиена.
✓ МолТех.	✓ Промышленные полы.
✓ Розлив.	✓ Переработка отходов.
✓ Напитки.	✓ Комплект.
✓ Мороженое.	✓ Интернэшнл.

Организатор выставки:

ЦВК «Экспоцентр», 123100, Россия, Москва,
Краснопресненская набережная, 14

Место проведения: МВЦ «Крокус Экспо»



<https://www.agroprod mash-expo.ru/>